



HAL
open science

Contributions à la résolution du problème inverse d'estimation du terme source

Grégory Turbelin

► **To cite this version:**

Grégory Turbelin. Contributions à la résolution du problème inverse d'estimation du terme source. Mécanique [physics]. Université d'Evry Val d'Essonne, 2019. tel-02926234

HAL Id: tel-02926234

<https://univ-evry.hal.science/tel-02926234>

Submitted on 31 Aug 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

Contributions à la résolution du problème inverse d'estimation du terme source

Grégory TURBELIN

*Université d'Évry Val d'Essonne
Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry (LMEE)*

Date de soutenance : 7 novembre 2019

Jury

M. Franck Delvare	Professeur, Université de Caen	Rapporteur
M. Maithili Sharan	Professeur, Institut Indien de Technologie de Delhi	Rapporteur
M. Lionel Soulhac	Professeur, INSA de Lyon	Rapporteur
M. Amer Chpoun	Professeur, Université d'Évry Val d'Essonne	Examineur
M. Zhi-Qiang Feng	Professeur, Université d'Évry Val d'Essonne	Examineur
M. François Vialatte	HDR, École supérieure de physique et de chimie industrielles de la ville de Paris	Examineur

Avertissement

Le présent manuscrit est une version réduite (sans notice personnelle) de celui soumis aux rapporteurs.

A Carole, Robin & Alma

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier Zhi-Qiang Feng et Olivier Quemener, ancien et nouveau directeurs du LMEE, qui m'ont accueilli au sein de leur laboratoire et grâce à qui la thématique des problèmes inverses est devenue un axe fort de recherche.

Je remercie Amer Chpoun pour son soutien sans faille et pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail.

J'exprime mes sincères remerciements à Messieurs Franck Delvare, Maithili Sharan et Lionel Soulhac de l'intérêt porté à ce mémoire et pour avoir accepté le lourd travail de rapporteur. Je remercie également M. François Vialatte pour avoir accepté d'évaluer mes travaux.

Je tiens tout particulièrement à exprimer ma reconnaissance aux trois personnes qui ont su, aux moments opportuns, orienter ma carrière dans la bonne direction : M. René Jean Gibert, grâce à qui tout a commencé, Michel Grignon qui a réussi à imposer la thématique « Environnement » au sein du laboratoire et enfin Jean-Pierre Issartel qui, en nous faisant confiance, a rendu passionnantes ces huit dernières années de recherche.

Je pense également à mes collègues de l'équipe : Pierre, Amir, Promod et surtout Sarvesh avec qui nous avons accompli un travail remarquable. Je n'oublierai pas Hamza et les doctorants ou stagiaires avec qui j'ai travaillé ni nos partenaires de la DGA (Xavier), de Fluidyn (Claude, Malo, Damien, Lobnat), de l'Irba (Marie Helène, Philippe) ou de l'IIT Delhi (Maithili, encore), sans qui la présente habilitation n'aurait pas pu voir le jour.

Enfin j'adresse un amical salut à tous les collègues de l'UFR ST et du LMEE que j'ai rencontrés durant ces nombreuses années passées à l'Université d'Evry.

Depuis la soutenance de mon HDR, j'ai appris avec tristesse le décès de René Jean Gibert. C'est lui qui m'avait transmis mes premières notions de mécanique des structures et qui a été mon directeur de thèse. Sa mémoire restera indissociablement liée à l'enseignement et à la recherche dans le domaine de la mécanique à Evry.

TABLE DES MATIERES

Remerciements.....	5
Table des matières	7
1. Avant-propos.....	13
1.1 Objectif du travail présenté.....	13
1.2 Cadre de l'étude	13
2. Introduction	17
2.1 Contexte sociétal.....	17
2.2 Contexte scientifique	19
2.3 Organisation du rapport	22
3. Présentation de la méthode.....	23
3.1 Modélisation de la dispersion atmosphérique.....	23
3.1.1 L'équation de transport-diffusion.....	23
3.1.2 Conditions initiales et aux limites	25
3.1.3 Mesures de concentrations	26
3.1.4 Problème direct et ses grandeurs	28
3.2 Modèle adjoint pour la dispersion atmosphérique	29
3.2.1 Fonctions d'influence	29
3.2.2 Calcul des fonctions d'influence	30
3.2.3 Notion d'adjoint	31
3.2.4 Approche basée source et approche basée récepteur.....	32
3.3 Problème direct et problème inverse	33
3.3.1 Problème direct	33
3.3.2 Problème inverse	34
3.4 Le problème d'estimation du terme source.....	35
3.4.1 Formulation du problème	36
3.4.2 Solution de norme minimale	36
3.4.2 Cas particulier d'une source ponctuelle	40

3.5	La solution renormalisée	41
3.5.1	$\varphi(\mathbf{x})$ comme fonction de visibilité associée à un réseau de mesure.....	43
3.5.2	Définition de la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ dans le cadre d'une approche entropique	47
3.5.3	Géométrie apparente au réseau de mesures	48
3.6	Bilan de la section	50
4.	Résolution du problème inverse discret dans le cadre d'une approche non paramétrique	51
4.1	Définition du problème	51
4.1.1	Discrétisation du problème	51
4.1.2	La matrice d'influence.....	52
4.1.3	Analyse du problème inverse discret.....	53
4.2	Cas du système surdéterminé	54
4.2.1	Solution au sens des moindres carrés ordinaires	54
4.2.2	Solution au sens des moindres carrés généralisés.....	56
4.3	Cas du système sous déterminé.....	57
4.3.1	Solution de norme minimale.....	58
4.3.2	Solution de norme minimale pondérée	62
4.4	Inverses généralisés et matrices de résolution.....	63
4.4.1	Cas surdéterminé	64
4.4.2	Cas sousdéterminé	64
4.5	La solution renormalisée	64
4.5.1	Conditions de renormalisation.....	64
4.5.2	Matrice de résolution du modèle	65
4.6	Algorithme pour le calcul des poids optimaux.....	67
4.7	Comparaison avec d'autres méthodes d'inversion.....	70
4.7.1	Méthodes de type optimisation.....	71
4.7.2	Méthodes de type Bayésien	73
4.8	Bilan de la section	75
5.	Résolution du problème inverse dans le cadre d'une approche paramétrique.....	77

5.1	Définition du problème	77
5.2	Transformation et résolution du problème.....	78
5.2.1	Cas général	78
5.2.2	Cas particulier de la renormalisation.....	80
5.3	Interprétations des résultats	80
5.3.1	Longueur maximale du projeté orthogonal	80
5.3.2	Angle minimal entre vecteurs.....	81
5.3.3	Part de la norme expliquée par le modèle	82
5.4	Estimation de l'incertitude.....	83
5.4.1	Région de bonne estimation	83
5.4.2	Régions de confiance	84
5.4.3	Intervalles de confiance.....	85
5.5	Cas de source multiples	86
5.6	Bilan de la section.....	88
6.	Evaluation et mise en œuvre opérationnelle de la méthode.....	89
6.1	Evaluation des méthodes et algorithmes.....	89
6.1.1	Scénarios envisagés.....	89
6.1.2	Jeux de données pour l'évaluation	90
6.1.3	Evaluation avec les expériences DYCE	91
6.1.4	Evaluation avec les expériences FFT07	100
6.1.5	Evaluation avec les expériences MUST.....	109
6.2	Mise en œuvre opérationnelle.....	116
6.2.1	Surveillance continue	116
6.2.2	Planification	122
6.3	Bilan de la section.....	127
7.	Application au problème inverse neuro-électrique	129
7.1	Contexte scientifique et médical.....	129
7.1.1	De la physique atmosphérique aux neurosciences	129
7.1.2	Intérêt pour les neurosciences	129

7.1.3	Objectif visé	130
7.2	Modélisation de l'activité électrique du cerveau.....	132
7.2.1	Une approche macroscopique.....	132
7.2.2	Equations de l'électromagnétisme	133
7.2.3	Modèle de dipôle	134
7.2.4	Vecteur de mesure	134
7.2.5	Calcul des Lead Field Functions	137
7.3	Problème direct et problème inverse	138
7.3.1	Le problème direct.....	138
7.3.2	Le problème inverse	139
7.4	Problème discret.....	139
7.4.1	Modèle de source.....	139
7.4.2	Lead Field Matrix	140
7.4.3	Problème inverse discret.....	141
7.4.4	Forme générale des solutions	141
7.4.5	Matrice de résolution.....	142
7.5	Adaptation de la méthode de renormalisation.....	143
7.5.1	Renorm1D	143
7.5.2	Renorm3D	146
7.5.3	RENORM_param.....	149
7.5.4	Algorithme pour la mise en œuvre de la méthode RENORM3D	151
7.6	Comparaison avec d'autres méthodes d'inversion.....	153
7.6.1	Solutions obtenues à l'aide d'inverses généralisés	153
7.6.2	Solutions régularisées	156
7.7	Bilan de la section	157
8.	Conclusion et perspectives.....	161
8.1	Bilan	161
8.2	Perspectives	162
8.2.1	Perspectives sur la méthode.....	162
8.2.2	Perspectives sur son application	164

9. Bibliographies	169
9.1 Bibliographie de l’auteur	169
9.1.1 Liste des articles publiés dans revues internationales à comité de lecture	169
9.1.2 Liste des actes publiés de conférences internationales, congrès et colloques.....	170
9.1.3 Liste de conférences, workshop ou séminaires	172
9.2 Bibliographie générale	174
10. Annexes.....	183
10.1 Evaluation des modèles de dispersion, cas de l’approche directe	183
10.1.1 Expériences DYCE	183
10.1.2 Expériences FFT07	185
10.1.3 Expériences MUST	186
10.2 Algorithmes pour le calcul des matrices de pondération	189
10.2.1 RENORM1D.....	189
10.2.2 RENORM3D.....	190
10.3 Evaluation de l’algorithme RENORM3D.....	193
10.3.1 Modèle de boîte crânienne et calcul de La Lead Field Matrix	193
10.3.2 Evaluation sur des données synthétiques & réelles	195
10.3.3 Références	198

1. AVANT-PROPOS

1.1 Objectif du travail présenté

Au début de ma carrière, mon activité de recherche s'est déroulée au sein de l'équipe de « *Modélisation en Dynamique des Structures* » du Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry (LMEE). Puis, en 2012, j'ai rejoint l'équipe « *Mécanique des Fluides – Environnement* ». Mes travaux se sont alors orientés vers le développement d'outils d'aide à la décision pouvant être utilisés en cas de rejet dans l'air de substances hautement dangereuses pour l'être humain : radioéléments, agents biologiques, agents chimiques toxiques et/ou inflammables et/ou explosifs. Plus particulièrement, après avoir entamé une collaboration avec la Direction Générale de l'Armement (DGA)-Maîtrise NRBC et en particulier avec l'Ingénieur en chef de l'armement J.P. Issartel, mon activité s'est focalisée sur l'étude du problème inverse d'estimation du terme source (Source Term Estimation – STE – inverse problem, en anglais). Ce choix a été dicté par les besoins de nos partenaires industriels mais aussi par la richesse du sujet : le problème intéresse à la fois les mathématiciens et les scientifiques qui, dans différents domaines, cherchent souvent à déterminer l'état d'un système à partir de mesures indirectes. Cette thématique s'est naturellement imposée au sein de l'équipe et nous a permis de collaborer avec d'autres chercheurs, de participer à des programmes de recherche, d'obtenir des contrats. De plus, une large partie des résultats de nos travaux a pu être valorisée sous forme de publications dans des revues à comité de lecture et/ou dans des actes de congrès internationaux. Dans ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches, j'ai choisi de me focaliser sur cette thématique. Je me suis fixé comme objectif, plutôt que de rédiger une synthèse des articles initialement écrits en anglais, de produire un document qui puisse servir directement de support de travail pour des collègues, voir même de support pédagogique. Cet objectif n'est probablement atteint que partiellement mais j'espère qu'il apportera, au moins, un éclairage intéressant sur les recherches effectuées.

1.2 Cadre de l'étude

Le problème d'estimation du terme source consiste à caractériser la cause (la source) d'un phénomène physique à partir d'observations (des mesures réalisées à l'aide d'une instrumentation adaptée) de ses effets. Ce problème est dit « inverse » : on cherche à déterminer la cause, les effets étant connus. C'est l'inverse du « problème direct », plus classique, qui

consiste à déduire les effets, la cause étant connue (Kern, 2002). La première difficulté qui apparaît dans l'étude de ce type de problèmes est que l'on cherche à reconstruire quelque chose (la source) qui n'est observée qu'indirectement au travers de mesures. Il est donc nécessaire de s'appuyer sur la modélisation pour définir la relation entre les deux. La seconde difficulté est que les problèmes inverses sont en général mal posés : les seules observations expérimentales ne suffisent pas à assurer l'unicité de la solution. Il est donc souvent nécessaire d'utiliser d'autres informations que celles contenues dans les mesures (information dite « a priori »). Cependant, puisque les problèmes inverses apparaissent dans de nombreux domaines de la physique (sciences de l'environnement, thermique, imagerie médicale, géologie...), on dispose aujourd'hui de nombreuses méthodes de résolution, voir Menke (1984), Rodgers (2000) ou Tarentola (2005). Certaines possèdent un domaine d'application assez large (méthode des moindres carrés, par exemple), tandis que d'autres sont plus spécifiquement liées à la physique du problème. C'est le cas (à première vue) de la méthode dite « de renormalisation », proposée dès 2005 par l'ingénieur en chef de l'armement J.P. Issartel.

L'objectif de cette méthode est de caractériser la source d'émission d'un contaminant atmosphérique à partir de mesures de concentrations, effectuées par un réseau de capteurs (la caractérisation consiste, au minimum, à localiser la position de la source et à estimer son intensité). Elle vise à être utilisée sur des sites sensibles instrumentés, en cas de contaminations hostiles (une agression terroriste, etc.), accidentelles (une fuite de gaz sur un site industriel, etc.) ou chroniques (une contamination d'origine routière pour des conditions météorologiques spécifiques, etc.). Les sites sensibles peuvent-être, par exemple, des installations militaires sujettes à d'éventuelles agressions extérieures ou des zones d'habitation situées à proximité directe d'installations industrielles classées, telles que les sites SEVESO (à hauts risques), les installations nucléaires civiles, etc. Nous pouvons également mentionner le cas où la contamination atmosphérique trouverait son origine à l'intérieur du site sensible, par exemple si un accident se produisait au cœur d'un site industriel de production de produits dangereux ou celui d'une attaque terroriste qui viserait un lieu public (gare, quartiers touristiques, zones commerciales, centres d'affaires, etc.). Dans tous ces cas, on comprend aisément le besoin des industriels, des autorités civiles ou militaires, des responsables de la sécurité, de disposer d'un outil d'inversion rapide et fiable en cas d'incident.

Dans le cadre d'une collaboration contractuelle avec la DGA-Maîtrise NRBC, puis directement avec Jean Pierre Issartel (aujourd'hui retraité et qui a rejoint le LMEE en tant que collaborateur bénévole), notre travail a notamment consisté à analyser la méthode afin d'en proposer de

nouvelles interprétations, à formaliser sa version discrète, à la coupler avec des modèles CFD ou encore à développer une approche permettant d'estimer les incertitudes sur les résultats. Nous avons également développé un algorithme de calcul fiable et rapide. Plus généralement, nous avons montré que la méthode de renormalisation offre un cadre propice, non seulement pour résoudre le problème d'estimation du terme source en physique de l'atmosphère, mais aussi dans d'autres branches de la physique. En effet nos derniers travaux portent sur la possibilité d'utiliser la méthode afin de pouvoir localiser, en temps réel, les sources de courants électriques à l'intérieur du cerveau (inversion de signaux électroencéphalographiques EEG).

2. INTRODUCTION

2.1 Contexte sociétal

Les catastrophes industrielles de Bhopal en Inde (explosion d'une usine de pesticides accompagnée de rejets de gaz toxique en 1984), de Viareggio en Italie (déraillement d'un wagon citerne suivi d'une dispersion de GPL, puis d'une explosion, en 2009) ou de Fukushima au Japon (explosion d'une centrale nucléaire suivie de rejets radioactifs en 2011), illustrent, de façon particulièrement tragique, une famille d'évènements accidentels caractérisés par la libération dans l'air de substances hautement dangereuses pour l'être humain : radioéléments, agents chimiques toxiques et/ou inflammables et/ou explosifs. On appelle « risque », la possibilité qu'un tel événement se produise. Lorsqu'un risque est lié « à la manipulation, au transport ou au stockage de substances dangereuses pour la santé et l'environnement », on le qualifie de « risque technologique ». Lorsqu'il est caractérisé à la fois par une faible fréquence et par une forte gravité (nombreuses victimes, dommages importants aux biens et à l'environnement) on parle de « risque majeur ».

La prévention des risques technologiques est une préoccupation des pouvoirs publics, des industriels mais aussi des habitants que la pression foncière a poussés à s'installer de plus en plus près de sites industriels potentiellement dangereux. Afin de maîtriser ce type de risques, les pouvoirs publics se sont dotés de nombreux outils réglementaires et législatifs. Ainsi, en France, la politique de prévention repose, notamment, sur les lois du 22 juillet 1987 et du 13 août 2004, pour la gestion des crises, et sur l'article L512-1 du code de l'environnement, sur la loi du 30 juillet 2003 et sur l'arrêté du 29 septembre 2005, pour la prévention des risques technologiques. Notons que ce dispositif s'insère dans le cadre juridique européen fixé par la directive dite « Seveso » de 1982 (actualisée en 1996 et 2012).

De façon concrète, le dispositif français repose sur quatre piliers : (1) la réduction des risques à la source par l'industriel, (notamment au travers « d'études de danger » mettant en évidence les différents scénarios d'accidents possibles), (2) l'information préventive du public (Commissions de Suivi des Sites - CSS), (3) la maîtrise de l'urbanisme (Plans de Prévention des Risques Technologiques - PPRT) et (4) l'organisation des secours (Plan d'Opération Interne – POI, Plan Particulier d'Intervention – PPI). La législation prévoit, par exemple, « qu'en cas d'accident susceptible d'avoir des effets au-delà de l'enceinte d'un établissement », il incombe à l'exploitant d'un site soumis à PPI « de diffuser immédiatement l'alerte auprès des autorités compétentes et d'informer celles-ci sur la situation et son évolution », ainsi que « de diffuser

l'alerte auprès des populations voisines ». Les sites concernés sont les entreprises SEVESO « seuil haut », les installations nucléaires de base (INB), les infrastructures liées au transport de matières dangereuses, les sites susceptibles de créer « par danger d'explosion ou d'émanation de produits nocifs, des risques très importants pour la santé, la sécurité ou l'environnement », les stockages souterrains de gaz naturel, d'hydrocarbures liquides, liquéfiés ou gazeux ou de produits chimiques à destination industrielle.

A ce contexte de « risque technologique » est venu s'ajouter celui de « risque NRBC ». Ce dernier, mis en exergue dès 2008 dans le « Livre blanc sur la défense et la sécurité nationale », (Mallet, 2008), est défini comme « l'éventualité que des populations civiles ou des forces armées soient exposées à des substances d'origine Nucléaire, Radiologique, Biologique ou Chimique (NRBC) ». A l'origine, cet acronyme n'était employé que par les spécialistes et professionnels de la sécurité et n'était associé qu'à l'utilisation d'armes non conventionnelles, dites de destruction massive. Après les attentats du 11 septembre 2001 et la prise en compte globale de la menace terroriste, les spécialistes ont commencé à parler de risque nucléaire, radiologique, biologique, chimique et explosif (NRBCE). Aujourd'hui, si on exclue le risque nucléaire (qui désigne exclusivement l'utilisation offensive de l'arme nucléaire et qui est traité de manière indépendante) et le risque explosif (uniquement lié à la menace d'attentat à l'explosif), le risque RBC désigne plutôt un ensemble de risques multiformes, accidentels (accidents industriels) ou malveillants (sabotage ou attentat terroriste), caractérisé par la libération dans l'environnement de substances hautement néfastes qui aurait pour conséquence potentielle d'affecter la santé ou la vie des personnes (civiles ou militaires) exposées. Les risques RBC, difficilement maîtrisables, font aujourd'hui partie des préoccupations majeures des organismes de défense et de sécurité civile d'autant que la densification de la population dans nos sociétés aggrave leurs conséquences potentielles. En France, des circulaires précisent la doctrine nationale de réponse aux situations d'actes malveillants en fonction de la nature de l'agent rejeté (R, B ou C). Cette doctrine repose sur des principes généraux d'anticipation, de connaissance et d'organisation des secours (voir, par exemple, les circulaires n°700 et 800 relatives à la doctrine nationale d'emploi des moyens de secours et de soins face à une action terroriste mettant en œuvre des matières respectivement chimiques et radioactives).

Dans les contextes précités (risques « technologiques » ou « RBC »), conformément aux recommandations ministérielles, les industriels, les armées, tout comme les services de secours, se sont équipés en matériels de détection, de protection (individuelle et collective), de décontamination et de simulation.

2.2 Contexte scientifique

Ainsi, en moins d'une décennie, les logiciels de simulation sont devenus des outils incontournables, utilisés pour :

- anticiper les risques (études de danger, estimation des conséquences potentielles d'un accident industriel majeur ou d'une attaque terroriste),
- gérer, en temps quasi-réel, les situations de crise (définition des périmètres impactés par un accident, détermination des zones de danger potentielles à évacuer...),
- analyser a posteriori des cas marquants (étude d'incidents passés, mise en évidence d'activités masquées...).

Pour que ces logiciels soient capables de représenter la réalité avec une certaine exactitude, ils doivent, avant tout, être construits autour de bons modèles de dispersion. En effet, le phénomène de dispersion est celui qui contrôle le devenir, en temps et en espace, de polluants (ou substances toxiques) émis dans les basses couches de l'atmosphère. Les modèles actuellement utilisés peuvent être classés dans trois grandes familles : les modèles Gaussiens, les modèles Eulériens, et les modèles Lagrangiens. A l'intérieur de chaque famille, il existe encore « une hiérarchie de modèles de complexité variable » (Sapolin, 2011), certains étant même capables de calculer, simultanément, l'écoulement atmosphérique et la dispersion (ce document n'ayant pas vocation à entrer dans le détail des modèles, nous ne le présenterons pas ici). Aujourd'hui, on considère que les outils et modèles relatifs aux phénomènes de dispersion atmosphérique ont atteint un haut degré de maturité : ils sont couramment utilisés, par les industriels, les autorités civiles ou militaires, pour produire des cartes de concentrations de polluants après spécification du terme source, de la météo (lorsqu'elle n'est pas calculée par le modèle), et de l'environnement de dispersion (terrain, obstacles, occupation des sols...). Le problème qui est résolu dans ce cas est dit « direct » : il consiste à déduire « les effets » (ici un champ de concentration), connaissant « les causes » (ici un champ de vent, un terme source...) qui l'ont engendré.

Le problème qui nous intéresse dans ce mémoire, est différent : il consiste à caractériser une source d'émission à partir d'observations réalisées par un réseau de capteurs (l'écoulement atmosphérique étant connu). C'est un problème « inverse » : on cherche à déterminer « la cause » (le terme source du rejet), « ses effets » étant connus sous forme d'un ensemble de mesures de concentration. Pour résoudre ce type de problème inverse (mal posé), on dispose aujourd'hui de nombreuses méthodes de résolution. Certaines possèdent un domaine d'applicabilité assez large (méthode des moindres carrés, par exemple), tandis que d'autres sont plus spécifiquement liées à la physique du problème. C'est le cas (à première vue) de la méthode

dite « de renormalisation », proposée par Issartel (2005) pour résoudre le problème inverse d'estimation du terme source en physique atmosphérique.

Cette approche déterministe, non paramétrique (elle vise à reconstruire une fonction source, continue en espace et en temps), a été initialement développée dans le cadre de l'évaluation de l'efficacité du réseau global de mesure de la radioactivité déployé dans le cadre du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires (TICE) (Hourdin et Issartel, 2000 ; Issartel et Baverel, 2003). Elle s'appuie sur le calcul d'une fonction de pondération φ , appelée fonction de visibilité (Issartel et al. 2007), qui corrige le biais intrinsèque de la solution de norme minimale. Grâce à cette fonction, la solution obtenue « manifeste un certain nombre de propriétés remarquables »¹. En particulier, « lorsque les mesures analysées sont engendrées par une émission ponctuelle et instantanée, la fonction d'émission a son maximum au lieu et à la date de l'émission »¹.

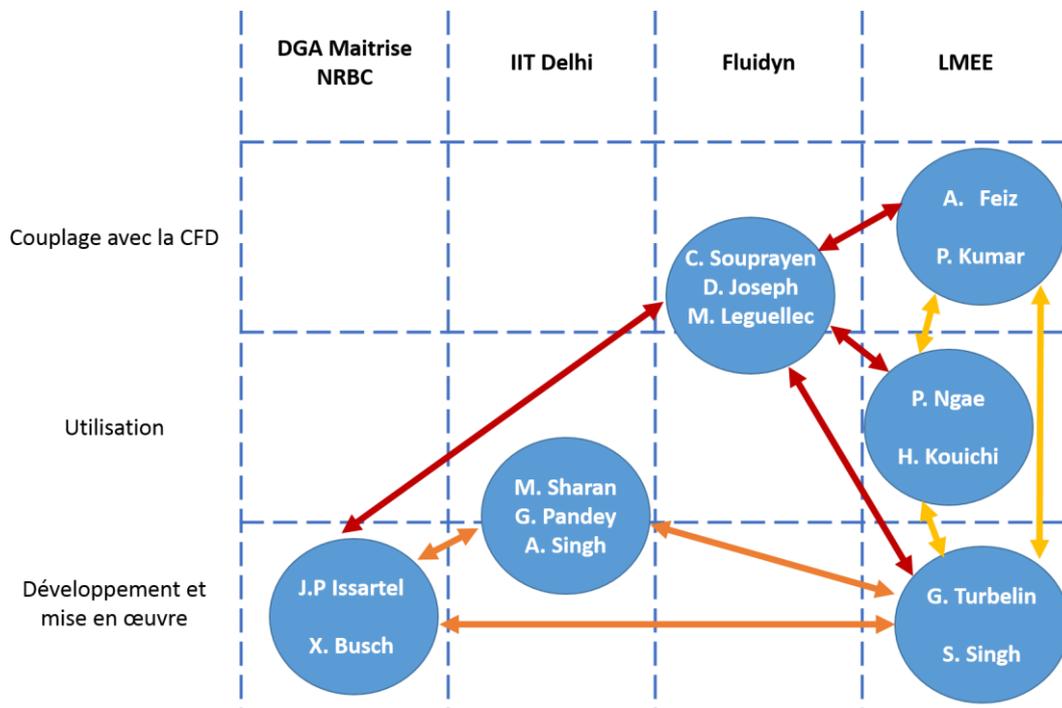


Fig. 1 : Interaction des différentes équipes de recherche autour de la méthode de renormalisation – Implication des équipes dans les différents projets.

Dès 2007, la méthode a intéressé le Professeur Maithili Sharan et son doctorant S. Singh de l'Institut Indien de Technologie (IIT) de Dehli (Sharan et al., 2009, 2011, 2012). Puis, en 2012, la Direction Générale de l'Armement (DGA), maîtrise NRBC, a décidé, d'une part, d'accélérer le développement de la méthode et, d'autre part, de l'associer avec des modèles de dispersion issus de la mécanique des fluides numériques. L'idée était de faire de la méthode de

¹ Communication personnelle avec Jean Pierre Issartel.

renormalisation un maillon d'une chaîne logicielle de modélisations et de traitement de données. Cette chaîne devait être exploitée pour surveiller, de façon continue, des sites sensibles et détecter de potentielles attaques par dispersion aérienne d'agents B (biologiques) et C (chimiques). Pour cela, elle devait fournir des cartographies continûment mises à jour de sources potentielles de produits émis dans l'environnement proche des sites surveillés. A partir de ces cartes, les anomalies observées sur les signaux devaient être plus aisément identifiées et qualifiées et éventuellement associées à des attaques par agents aériens dont la localisation serait donnée par la méthode. Les sites, initialement objet de cette surveillance et protection, devaient être des sites DGA sensibles ou des lieux d'engagement de forces armées. Cependant, des débouchés civils étaient aussi envisagés : la plateforme devait être capable de fournir, d'une part, une aide au diagnostic de vulnérabilité et, d'autre part, une aide à la décision en situation de crise pour les exploitants d'installations industrielles classées (tels que les sites SEVESO, les Installations Nucléaires Civiles...) et/ou les autorités civiles en cas d'attaque terroriste par contamination aérienne dans des lieux publics sensibles (gares, quartiers touristiques, zones commerciales, centres d'affaires...etc.). Dans tous les contextes précités et si une contamination aérienne (accidentelle ou provoquée) était détectée, les actions d'urgence (protection, confinement, évacuation et éventuellement neutralisation de l'origine de la contamination) devaient être élaborées sur la base a) d'une caractérisation du terme source par la méthode de renormalisation et b) de prévisions de trajectoires du panache simulées à partir de ce terme source. Enfin, la technologie développée devait être exploitable dans le cadre de la filière de la preuve, pour des analyses a posteriori d'événements de rejets atmosphériques (à la fois pour le contexte défense et le contexte civil).

La partie « couplage avec la CFD » (simulation des champs de vent, dispersion atmosphérique...) a été confiée à la société Fluidyn et à des collègues de l'équipe de Mécanique des Fluides et Environnement du LMEE. La partie théorique (analyse, interprétation, développement de la méthode de renormalisation en vue sa numérisation) a été confiée à moi-même et à Sarvesh Singh qui, après avoir soutenu sa thèse de doctorat, a rejoint le LMEE en tant que post-doctorant en 2013. Aussi, après avoir assimilé les concepts théoriques/mathématiques de la méthode, nous avons proposé de nouvelles interprétations et montré que son champ d'application était plus général qu'initialement envisagé. Ensuite, nous avons développé une version discrète de la méthode, associée à un algorithme de calcul performant, et avons proposé une méthodologie complète d'estimation de terme(s) source(s).

Parallèlement, l'université d'Evry a financé une thèse de doctorat (que j'ai co-encadrée) dans laquelle la méthode a été utilisée.

2.3 Organisation du rapport

Le présent manuscrit est une version réduite (sans notice personnelle) de celui soumis aux rapporteurs en vue de ma soutenance. Il s'appuie principalement sur les publications [A5 à A12] et [C9, C11 à C19] référencées au paragraphe 9.1. Il vise à décrire, d'une façon plus logique que chronologique, l'ensemble des contributions que j'ai apportées aux différents projets auxquels j'ai participé. Il est articulé cinq sections.

La première (sec. 3.2) présente le cadre théorique / mathématique dans lequel a été obtenue une grande partie de nos résultats et décrit la méthode de renormalisation de façon détaillée. Elle contient également des analyses (qui se trouvaient un peu éparpillés dans diverses revues ou proceedings de conférences) qui apportent un éclairage nouveau sur la méthode et permettent de la replacer dans le cadre général des méthodes de résolution des problèmes inverses.

La deuxième (sec. 3.3) détaille la discrétisation du problème et les différentes formulations qui en découlent. On montre notamment que la solution renormalisée peut être obtenue en calculant un pseudo inverse pondéré de la matrice d'influence et que la matrice de résolution de cette solution possède des propriétés remarquables. Nous proposons également un algorithme performant pour la calculer.

La troisième (sec. 3.4) présente l'utilisation de la méthode de renormalisation dans le cadre d'une approche paramétrique. Dans cette section, afin d'améliorer la lisibilité des résultats, de nouvelles interprétations sont proposées et une méthode d'évaluation de l'incertitude associée à la méthode de renormalisation est développée.

La quatrième (sec. 3.5) présente l'évaluation de l'efficacité des méthodes et algorithmes présentées dans les parties précédentes, dans des conditions similaires à leur utilisation opérationnelle. Elle décrit également le concept d'une chaîne logicielle dont le cœur est constitué par un module basé sur la méthode de renormalisation.

La cinquième et dernière (sec. 3.6) montre que la méthode peut être utilisée pour traiter le signal électroencéphalographique (EEG) et localiser, en temps réel, les sources de courants électriques à l'intérieur du cerveau.

Enfin, dans la conclusion nous dressons le bilan de ces travaux et réfléchissons aux perspectives que nous pouvons leur donner.

3. PRESENTATION DE LA METHODE

Cette partie présente le cadre théorique / mathématique dans lequel a été obtenue une grande partie de nos résultats et décrit la méthode de renormalisation de façon détaillée. Elle contient également des analyses (qui se trouvaient un peu éparpillés dans diverses revues ou proceedings de conférences) qui apportent un éclairage nouveau sur la méthode. Il est important d'insister sur le fait que cette partie ne se limite pas à une simple étude de l'état de l'art, mais synthétise plusieurs années d'apprentissage et d'analyse de la méthode.

3.1 Modélisation de la dispersion atmosphérique

L'objectif premier de la modélisation est d'élaborer une représentation mathématique d'un phénomène, ou d'un système, physique afin de pouvoir le décrire et prédire son évolution. Dans notre cas, le phénomène pratique à modéliser est celui du transport et de la diffusion, dans l'atmosphère, d'une substance néfaste pour l'être humain ou l'environnement (polluante, toxique, inflammable ou explosive...) suite à un rejet accidentel ou volontaire. Le phénomène est étudié sur un intervalle de temps $[0, T]$ et dans un domaine spatial D , dans lequel les trois directions de l'espace sont notées x , y et z . Au fur et à mesure que la substance est transportée par le vent et s'éloigne des lieux d'émission, sa concentration dans l'air varie. Dans le cadre d'une approche Eulérienne, cette grandeur est représentée par un champ scalaire, noté $c(t, \mathbf{x})$, où le couple (t, \mathbf{x}) est dans $\Omega = [0, T] \times D$.

Dans le texte, les vecteurs et les matrices sont en caractères gras, les scalaires sont représentés en italique ou en caractères normaux.

3.1.1 *L'équation de transport-diffusion*

Soit une substance transportée par un écoulement d'air turbulent caractérisé par son champ de vitesse tridimensionnel, $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Nous ferons ici l'hypothèse que ce champ a été pré-calculé en amont de l'étude à l'aide d'un modèle spécifique (extrapolation de mesures locales, modèles analytiques ou CFD...). On supposera également que l'écoulement est incompressible $\nabla \cdot \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0$ (où $\nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y, \partial / \partial z)$ est l'opérateur de différentiation spatiale). Enfin, on supposera que la substance est un traceur passif, c'est-à-dire qu'elle suit exactement le mouvement des particules d'air, sans le modifier, et qu'elle est chimiquement inerte. Le champ

(scalaire) de concentration, $c(t, \mathbf{x})$, est alors solution d'une équation aux dérivées partielles, dite de transport-diffusion (ou d'advection-diffusion), qui s'exprime sous la forme générale :

$$\frac{\partial c(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla c(t, \mathbf{x}) = D \nabla^2 c(t, \mathbf{x}) + S + P \quad (1)$$

- $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla c(t, \mathbf{x})$ est le terme de transport (ou d'advection).
- $D \nabla^2 c(t, \mathbf{x})$ est le terme de diffusion, où D représente le coefficient de diffusion moléculaire de l'espèce considérée.
- S est le terme source. Nous supposons ici, de façon classique, que la source peut être représentée par une fonction $s(t, \mathbf{x})$ qui décrit à chaque instant, et en chaque point du domaine, le taux d'émission par unité de volume et de temps.
- P est le terme perte. Les pertes peuvent être dues aux précipitations atmosphériques (dépôts humides) ou à d'autres phénomènes (non pris en compte ici), comme les transformations physico-chimiques ou la décroissance de certaines substances radioactives.

Comme l'écoulement porteur est turbulent, il est intéressant d'oublier le champ instantané trop complexe et de chercher l'équation prédisant simplement l'évolution du champ de concentration moyen. Pour cela, les variables sont décomposées en parties moyennes et fluctuantes (décomposition de Reynolds - 1894) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \rangle + \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) \\ c(t, \mathbf{x}) = \langle c(t, \mathbf{x}) \rangle + c'(t, \mathbf{x}) \end{cases} \quad (2)$$

En introduisant cette décomposition dans l'équation (1) et en appliquant l'opérateur de moyenne de Reynolds (afin d'en faire disparaître les termes fluctuants), on obtient :

$$\frac{\partial \langle c(t, \mathbf{x}) \rangle}{\partial t} + \langle \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \rangle \cdot \nabla \langle c(t, \mathbf{x}) \rangle = -\nabla \cdot \langle \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) c'(t, \mathbf{x}) \rangle + D \nabla^2 \langle c(t, \mathbf{x}) \rangle + \langle s(t, \mathbf{x}) \rangle + \langle P \rangle \quad (3)$$

L'objectif, qui était d'oublier le champ instantané et d'obtenir une équation pour le champ moyen, n'est atteint qu'en partie. En effet, de nouvelles inconnues apparaissent : les trois composantes du flux turbulent $\langle \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) c'(t, \mathbf{x}) \rangle$. Il est toujours possible de décrire ce flux en le reliant au gradient de concentration moyenne à travers un tenseur \mathbf{K} :

$$\langle \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) c'(t, \mathbf{x}) \rangle = \mathbf{K} \nabla \langle c(t, \mathbf{x}) \rangle \quad (4)$$

La difficulté est alors reportée sur la description de \mathbf{K} , appelé le « tenseur de diffusion ». En première approximation, on peut considérer que \mathbf{K} est constant et diagonal, avec

$K_{xx} = K_{yy} \neq K_{zz}$ (on trouve dans la littérature, plusieurs paramétrisations pour estimer K_{yy} et K_{zz}). Ainsi, puisque le terme de diffusion moléculaire est négligeable devant celui de la diffusion turbulente, si on exprime les dépôts humides sous la forme $\langle P \rangle = -\lambda(t, \mathbf{x}) \langle c(t, \mathbf{x}) \rangle$ (où $\lambda(t, \mathbf{x})$ est un coefficient dit « de lessivage » qui dépend des conditions météorologiques), si on abandonne la notation $\langle \cdot \rangle$ pour le terme source et si on note $C(t, \mathbf{x}) = \langle c(t, \mathbf{x}) \rangle$ et $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \rangle$, le champ de concentration moyen est solution de :

$$\frac{\partial C(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla C(t, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \{ \mathbf{K} \nabla C(t, \mathbf{x}) \} + \lambda(t, \mathbf{x}) C(t, \mathbf{x}) = s(t, \mathbf{x}) \quad (5)$$

De façon symbolique, nous pouvons représenter cette équation sous la forme

$$\mathcal{L}(C) = s \quad (6)$$

où C est la concentration, s la fonction source et $\mathcal{L} \equiv (\partial / \partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla - \nabla \cdot \mathbf{K} \nabla + \lambda)$ l'opérateur linéaire qui décrit le problème de transport-diffusion.

3.1.2 Conditions initiales et aux limites

Pour compléter l'équation (5), il convient de lui adjoindre des conditions initiales sur l'ensemble du domaine D ainsi que des conditions aux limites sur la totalité de sa frontière ∂D . Les conditions initiales, $C(0, \mathbf{x}) = C_0(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in D$, décrivent l'état du système au début de l'étude. Puisque, généralement, on considère que la concentration de l'espèce considérée est nulle préalablement à l'incident ($C(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$), on pose

$$C_0(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in D \quad (7)$$

Les conditions aux limites imposent les valeurs que la concentration $C(t, \mathbf{x})$, ou que sa dérivée normale $\nabla C(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$, doit vérifier sur l'ensemble de ∂D dotée d'une normale unitaire extérieure \mathbf{n} . La partie de la frontière où $C(t, \mathbf{x})$ est connue est notée ∂D_1 , la partie où $\nabla C(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$ est connue est notée ∂D_2 , avec $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$ et $\partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D$.

- Les conditions aux limites sur ∂D_1 , de type « valeurs imposées », sont dites de Dirichlet,
- celles sur ∂D_2 , de type « gradient imposé », sont dites de Neumann.

De façon classique, ∂D est constitué de la limite inférieure $\partial D_{z=0}$ (sol), de la limite supérieure $\partial D_{z=H}$ (haut), des limites latérales avec vent entrant $\partial D_{z>0}^- = \{ \mathbf{x} \in \partial D_{z>0} \mid \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} < 0 \}$ et des limites

latérales avec vent sortant $\partial D_{z>0}^+ = \{\mathbf{x} \in \partial D_{z>0} \mid \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \geq 0\}$. Dans le cas où le domaine est suffisamment étendu dans toutes les directions (i.e. $|x|, |y|, |z| \rightarrow \infty$), on prend

- $\partial D_1 = \partial D_{z>0}^- \cup \partial D_{z=H} \cup \partial D_{z>0}^+$,
- $\partial D_2 = \partial D_{z=0}$.

Les conditions aux limites s'expriment alors sous la forme :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{t}, \mathbf{x}) &= 0 \quad \forall (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_1 \\ K_z \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) &= -v^d C(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \quad \forall (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Ici la condition au niveau du sol rend compte du processus du dépôt sec, où v^d , homogène à une vitesse, est appelée « la vitesse de dépôt ». Notons que, dans un cadre plus général, les conditions de Dirichlet sur $\partial D_{z=H}$ et $\partial D_{z>0}^+$ peuvent être remplacées par des conditions de Neumann. Les conditions aux limites s'expriment alors sous la forme :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{t}, \mathbf{x}) &= 0 \quad \forall (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z>0}^- \\ \nabla C(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \forall (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z>0}^+ \\ K_z \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) &= -v^d C(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \quad \forall (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z=0} \\ \frac{\partial C}{\partial z}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) &= 0 \quad \forall (\mathbf{t}, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z=H} \end{aligned} \quad (9)$$

3.1.3 Mesures de concentrations

En résolvant analytiquement ou numériquement l'équation (5) associée aux conditions initiales (7) et aux limites (8) ou (9), on obtient le champ $C(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ en tout point du domaine spatio-temporel $\Omega = [0, T] \times D$. Cependant, dans la pratique, on ne s'intéresse pas forcément à l'ensemble de ce champ, mais uniquement aux valeurs observées en certains points $\mathbf{o}_i \in \Omega$, $i = 1 \dots m$. Ces valeurs théoriques (c.à.d. modélisées), qui correspondent aux « sorties » du modèle, sont notées $\mu_{mo}(\mathbf{o}_i)$. Elles sont obtenues en rajoutant au modèle des équations dites « d'observation ».

Dans la suite de ce manuscrit, on considèrera que $C(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ et $s(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ sont des fonctions continues de Ω , à valeurs dans \mathbb{R} , qui appartiennent à un espace vectoriel E . Cet espace est muni d'un produit scalaire

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(\mathbf{t}, \mathbf{x}) h(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt \quad \forall g, h \in E \quad (10)$$

et d'une norme

$$\|g\| = \left(\int_{\Omega} g(t, \mathbf{x})^2 d\mathbf{x}dt \right)^{1/2} = \langle g, g \rangle \quad \forall g \in E \quad (11)$$

Connaissant le champ $C(t, \mathbf{x})$, une observation réalisée en un point $\mathbf{o} = (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ est définie à l'aide de l'équation d'observation suivante :

$$\mu_{mo}(\mathbf{o}) = \int_{\Omega} C(t, \mathbf{x}) \pi_o(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}dt = \langle C(t, \mathbf{x}), \pi_o(t, \mathbf{x}) \rangle \quad (12)$$

où la fonction $\pi_o(t, \mathbf{x}) \in E$ est une fonction dite « d'échantillonnage », telle que $\int_{\Omega} \pi_o(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}dt = 1$, qui décrit entièrement l'observation (Bocquet, 2005). Si la fonction π_o est égale à la fonction δ de Dirac :

$$\int_{\Omega} C(t, \mathbf{x}) \delta_o(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}dt = \begin{cases} C(t_o, \mathbf{x}_o) & \text{si } (t, \mathbf{x}) = \mathbf{o} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (13)$$

on dit que la mesure est « ponctuelle ».

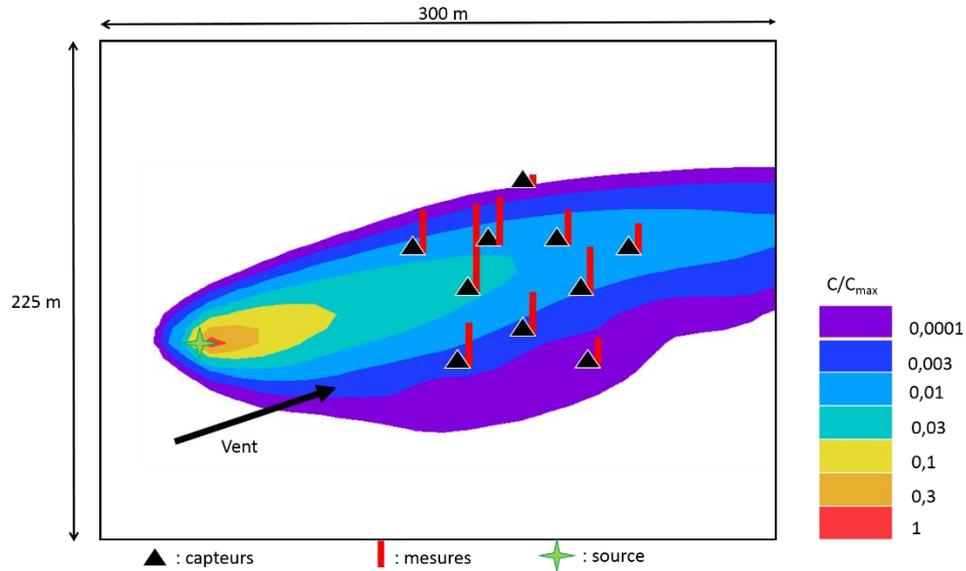


Fig. 2 : Mesures de concentrations à un instant donné, cas d'une source ponctuelle stationnaire,

$s(\mathbf{x}) = q_s \delta_s(\mathbf{x}) \quad \forall t$. Ce cas test servira d'illustration tout au long de ce paragraphe.

Si m observations sont réalisées aux points $\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_m \in \Omega$ (voir figure 2), en posant $\pi_{o_i}(t, \mathbf{x}) = \pi_i(t, \mathbf{x})$, les m mesures sont données par :

$$\mu_{mo}(\mathbf{o}_i) = \int_{\Omega} C(t, \mathbf{x}) \pi_i(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}dt = \langle C(t, \mathbf{x}), \pi_i(t, \mathbf{x}) \rangle, \quad i = 1 \dots m \quad (14)$$

Dans la suite de ce document, le vecteur $\boldsymbol{\mu}_{mo} = [\mu_{mo}(\mathbf{o}_1), \dots, \mu_{mo}(\mathbf{o}_m)]^T$ regroupera l'ensemble des observations théoriques, sorties du modèle de dispersion. Comme le suggère la figure 3, ces observations dépendent complètement du taux d'émission représenté par la fonction source $s(t, \mathbf{x})$.

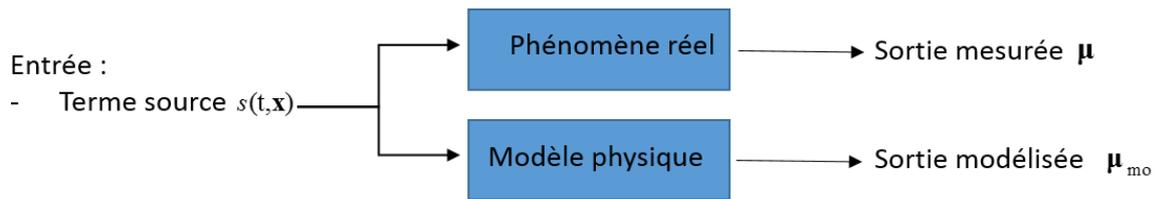


Fig. 3 : Système réel et représentation par un modèle.

La figure 3 nous rappelle également qu'un modèle n'est qu'un moyen simplifié de représenter la réalité physique. Il n'est donc pas forcément capable de reproduire toute la complexité du comportement du système réel : ses résultats correspondent à un système idéal, différent de celui observé dans la réalité ($\mu_{mo} \neq \mu$).

3.1.4 Problème direct et ses grandeurs

L'approche schématisée figure 3 présente, de façon très simplifiée, le problème dit « direct ». Ce dernier consiste à calculer une « réponse » (« sortie du modèle ») à des « sollicitations » connues (« entrées du modèle »). De façon plus précise, on peut décrire le problème direct en utilisant la terminologie (inspirée de l'automatisme) proposée par Maillet et Petit (2008) : il consiste à calculer un vecteur de mesure théorique μ_{mo} (la « variable de sortie ») connaissant $s(t,x)$ (la « variable d'entrée »), le champ de vent $\mathbf{U}(t,x)$, l'état initial $C(t=0, \mathbf{x})$, les paramètres physiques du système et ceux de l'instrumentation $\pi_i(t,x)$. Pour cela il faut calculer l'« état du système », c'est à dire le champ de concentration $C(t,x)$, en résolvant les « équations d'état » du système (équation (5) associée aux conditions initiales (7) et aux limites (8-9)). Les mesures théoriques, regroupées dans le vecteur μ_{mo} , sont obtenues à l'aide de la relation (14) aussi appelée « équation de sortie ». Dans cette description, plusieurs types de grandeurs ou variables apparaissent. On distinguera donc :

- La « variable d'état », ici le champ de concentration $C(t,x)$.
- L'« état initial » $C_0(\mathbf{x})$, c'est-à-dire le champ de concentration à l'instant où débute l'incident.
- Les « paramètres structurels » du système physique. Ici, on peut les regrouper dans un « vecteur des paramètres », $\boldsymbol{\beta} = (K_{xx}, K_{yy}, K_{zz}, \lambda, v^d)^T$ où l'exposant « ^T » indique la transposition. Si l'on prend le terme « paramètre » au sens très large, le champ de vent et les fonctions d'échantillonnages $\pi_i(t,x)$ qui apparaissent dans les équations d'observation, peuvent être également intégrées au vecteur $\boldsymbol{\beta}$.

- La « variable d'entrée », sous l'effet de laquelle le champ de concentration va évoluer. Ici cette variable est la fonction source $s(t, \mathbf{x})$.
- Les « variables de sorties », ici les mesures de concentration théoriques regroupées dans le vecteur μ_{mo} .

A partir de ces définitions, on peut construire le diagramme fonctionnel représenté figure 4.

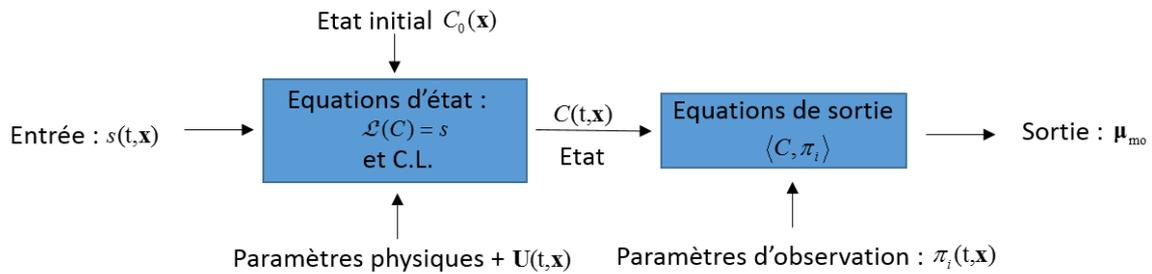


Fig. 4 : Diagramme fonctionnel du problème direct.

3.2 Modèle adjoint pour la dispersion atmosphérique

3.2.1 Fonctions d'influence

Puisqu'une observation réalisée en un point $\mathbf{o} \in \Omega$ dépend linéairement de la source, il est possible de relier directement ces deux grandeurs à l'aide d'une équation intégrale du type :

$$\mu_{mo}(\mathbf{o}) = \int_{\Omega} a_o(t, \mathbf{x}) s(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{o} \in \Omega \quad (15)$$

La fonction $a_o(t, \mathbf{x}) \in E$ est une fonction de Green qui décrit la sensibilité de l'observation, réalisée au point \mathbf{o} , vis-à-vis de potentielles émissions élémentaires qui pourraient se produire dans les différentes parties de l'espace et du temps. Dans les travaux précurseurs d'Uliasz et Pielke (1991) cette fonction est nommée « fonction d'influence ». De façon pratique, la fonction $a_o(t, \mathbf{x})$ s'interprète comme étant la mesure que l'on réaliserait en \mathbf{o} si un rejet unitaire, ponctuel en espace et en temps, se produisait en (t, \mathbf{x}) . Le concept de fonction d'influence a été initié par Marchuk (1995) et formalisé dans le cadre Eulérien de la dispersion atmosphérique par Pudykiewicz (1998). Il a été développé en France, à la demande du CEA (Hourdin et Issartel, 2000), afin d'évaluer l'efficacité du réseau global de mesure de la radioactivité atmosphérique déployé dans le cadre du « traité d'interdiction complète des essais nucléaires » (Issartel et Baverel, 2003). Si m mesures sont réalisées aux points $\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_m \in \Omega$, il faut utiliser m fonctions $a_{o_i}(t, \mathbf{x}) = a_i(t, \mathbf{x})$ pour exprimer les m observations sous la forme :

$$\mu_{mo}(\mathbf{o}_i) = \int_{\Omega} s(\mathbf{t}, \mathbf{x}) a_i(\mathbf{t}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} dt = \langle s(\mathbf{t}, \mathbf{x}), a_i(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \rangle, i = 1 \dots m \quad (16)$$

On voit que ces relations permettent de calculer commodément (c'est-à-dire sans avoir à calculer l'ensemble du champ de concentration), pour n'importe quel terme source, les mesures modélisés correspondantes. Ainsi la connaissance des fonctions d'influence est un élément essentiel de nombreux problèmes inverses linéaires. Les fonctions $a_i(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ sont des éléments physiques qu'on évalue en utilisant, de façon appropriée (voir ci-après), le modèle (5).

3.2.2 Calcul des fonctions d'influence

Dans le cas étudié ici de la dispersion atmosphérique, les fonctions $a_i(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ sont solutions d'équations aux dérivées partielles que l'on obtient en remplaçant, dans (16), $s(\mathbf{t}, \mathbf{x})$ par son expression issue de (5) :

$$\mu_{mo}(\mathbf{o}_i) = \int_{\Omega} a_i \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla C - \nabla \cdot \{ \mathbf{K} \nabla C \} + \lambda C \right) dt d\mathbf{x} \quad (17)$$

La partie de droite est composée de quatre termes. Le premier s'exprime, à l'aide d'une intégration par partie, sous la forme :

$$\int_{\Omega} a_i \frac{\partial C}{\partial t} dt d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} C \frac{\partial a_i}{\partial t} dt d\mathbf{x} + \int_D [C(T) a_i(T) - C(0) a_i(0)] d\mathbf{x} \quad (18)$$

En utilisant la formule de Gauss-Green-Ostrogradski et en rappelant que le vent est un écoulement d'air incompressible ($\nabla \cdot \mathbf{U} = 0$), on obtient le deuxième terme sous la forme :

$$\int_{\Omega} a_i \mathbf{U} \cdot \nabla C dt d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} C \mathbf{U} \cdot \nabla a_i dt d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\partial D} a_i C \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} dS dt \quad (19)$$

La même formule permet d'exprimer le troisième terme sous la forme :

$$\int_{\Omega} -a_i \nabla \cdot \{ \mathbf{K} \nabla C \} dt d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} C \nabla \cdot \{ \mathbf{K} \nabla a_i \} dt d\mathbf{x} + \int_0^T \int_{\partial D} (-a_i \mathbf{K} \nabla C + C \mathbf{K} \nabla a_i) \cdot \mathbf{n} dS dt \quad (20)$$

Le dernier terme est égal à

$$\lambda \int_{\Omega} a_i C dt d\mathbf{x} \quad (21)$$

En les regroupant, et en utilisant la relation (7), $C(t=0) = 0$, on arrive à l'équation

$$\begin{aligned} \mu_{mo}(\mathbf{o}_i) = & \int_{\Omega} C \left(- \frac{\partial a_i}{\partial t} - \mathbf{U} \cdot \nabla a_i - \nabla \cdot \{ \mathbf{K} \nabla a_i \} + \lambda a_i \right) dt d\mathbf{x} + \int_D C(T) a_i(T) d\mathbf{x} + \\ & + \int_0^T \int_{\partial D} (a_i C \mathbf{U} - a_i \mathbf{K} \nabla C + C \mathbf{K} \nabla a_i) \cdot \mathbf{n} dS dt \end{aligned} \quad (22)$$

Pour retrouver l'équation (14), on doit donc avoir

$$- \frac{\partial a_i}{\partial t} - \mathbf{U} \cdot \nabla a_i - \nabla \cdot \{ \mathbf{K} \nabla a_i \} + \lambda a_i = \pi_i \quad (23)$$

avec

$$a_i(t=T, \mathbf{x}) = 0 \quad (24)$$

et

$$\int_{\partial D} (a_i C \mathbf{U} - a_i \mathbf{K} \nabla C + C \mathbf{K} \nabla a_i) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (25)$$

En prenant en compte les conditions aux limites (8), la dernière équation prend la forme

$$\int_{\partial D_1} a_i \mathbf{K} \nabla C \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial D_2} C (a_i v^d + \mathbf{K} \nabla a_i \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (26)$$

soit

$$\begin{aligned} a_i(t, \mathbf{x}) &= 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_1 \\ K_z \frac{\partial a_i}{\partial z}(t, \mathbf{x}) &= -v^d a_i(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_2 \end{aligned} \quad (27)$$

Notons que si nous avons utilisé les conditions aux limites (9) à la place des conditions (8), nous aurions obtenu, comme Pudykiewicz (1998), en supposant que $\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z=H}$:

$$\begin{aligned} a_i(t, \mathbf{x}) &= 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z>0}^- \\ \mathbf{K} \nabla a_i(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} + a_i(t, \mathbf{x}) \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z>0}^+ \\ K_z \frac{\partial a_i}{\partial z}(t, \mathbf{x}) &= -v^d a_i(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z=0} \\ \frac{\partial a_i}{\partial z}(t, \mathbf{x}) &= 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \partial D_{z=H} \end{aligned} \quad (28)$$

3.2.3 Notion d'adjoint

Les m équations (23), associées aux conditions initiales (24) et aux limites (27-28), sont semblables à l'équation (5), associée aux conditions initiales (7) et aux limites (8-9). Elles peuvent être vue comme étant des équations de dispersion atmosphérique ayant une évolution du temps et un champ de vent inversés et dans lesquelles les fonctions d'échantillonnage jouent le rôle de sources.

Les fonctions $a_i(t, \mathbf{x})$ représentent donc des champs de pseudo-concentrations d'espèces dispersées à rebours depuis les lieux d'observations. Issartel et Baverel (2003) ont proposé de les appeler « rétro panaches » (voir figure 5). De plus, de façon symbolique nous pouvons représenter l'équation (23) sous la forme

$$\mathcal{L}^*(a_i) = \pi_i \quad (29)$$

où $\mathcal{L}^* \equiv (-\partial / \partial t + \{-\mathbf{U}\} \cdot \nabla - \nabla \cdot \mathbf{K} \nabla + \lambda)$. En utilisant les équations (14) et (16), on a

$$\mu_{mo}(\mathbf{o}_i) = \langle C, \pi_i \rangle = \langle s, a_i \rangle \quad (30)$$

Soit, en utilisant les formes symboliques (6) et (29) :

$$\langle C, \mathcal{L}^*(a_i) \rangle = \langle \mathcal{L}(C), a_i \rangle \quad (31)$$

On dit que les opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{L}^* sont adjoints l'un de l'autre pour le produit scalaire (10). On dit aussi que les équations (5) et (23) sont adjointes l'une de l'autre. C'est pourquoi les fonctions $a_i(t, \mathbf{x})$ sont aussi appelées « fonctions adjointes ».

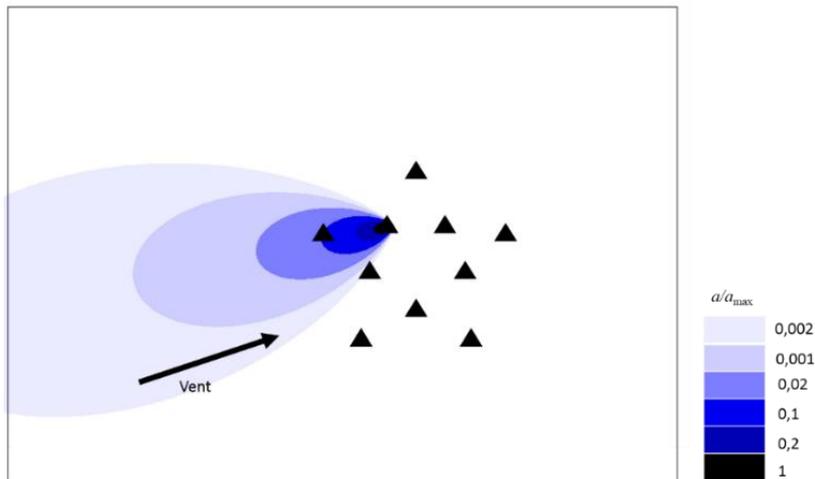


Fig. 5 : Fonction d'influence $a(\mathbf{x})$ d'un des capteurs du réseau, cas d'un vent stationnaire.

3.2.4 Approche basée source et approche basée récepteur

L'approche qui consiste à utiliser les équations (23) et (16) pour calculer μ_{mo} est représentée, figure 6, sous la forme d'un diagramme fonctionnel.

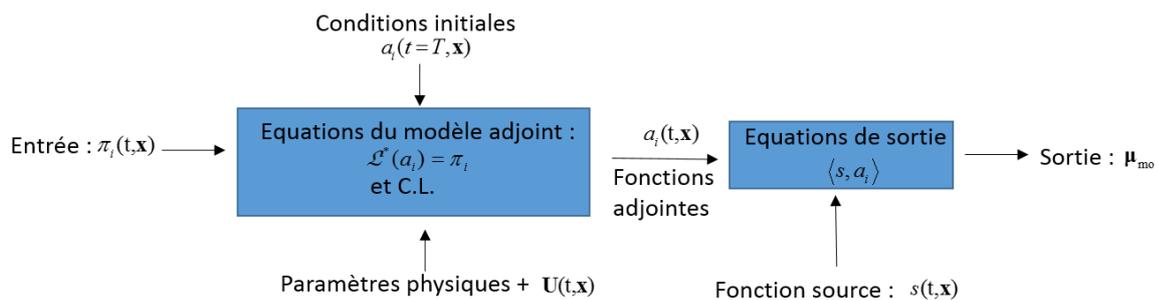


Fig. 6 : Diagramme fonctionnel de l'approche « basée récepteurs ».

En utilisant la terminologie proposée par Uliasz et Pielke (1991), cette approche est dite « basée récepteurs ». En effet, les mesures sont estimées à partir des fonctions d'influence $a_i(t, \mathbf{x})$ qui correspondent à des pseudo-concentrations d'espèces dispersées à rebours dans l'espace et dans le temps depuis les récepteurs. De même, l'approche schématisée figure 4, qui consiste à utiliser les équations (5) et (14) pour calculer μ_{mo} , est qualifiée « d'approche basée source ». Dans ce

cas, les mesures sont estimées à partir d'un champ de concentration obtenu en résolvant l'équation de transport diffusion avec la fonction $s(t, \mathbf{x})$ comme terme source.

3.3 Problème direct et problème inverse

3.3.1 Problème direct

Les deux approches schématisées figures 4 et 6 présentent, de façon simplifiée, deux techniques pouvant être utilisées pour résoudre le problème dit « direct ». Ce dernier consiste à simuler les mesures, connaissant la fonction source $s(t, \mathbf{x})$, le champ de vent $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$, les conditions initiales $C(t=0, \mathbf{x})$ ou $a_i(t=T, \mathbf{x})$, les paramètres physiques $\boldsymbol{\beta}$ et ceux de l'instrumentation $\pi_i(t, \mathbf{x})$. Généralement, ce problème est bien posé au sens d'Hadamard (1923). Ceci signifie que les trois conditions suivantes sont réalisées :

- une solution existe toujours,
- la solution est unique,
- la solution est stable : elle dépend de manière continue des données (lorsque l'erreur Δs sur la donnée d'entrée s tend vers zéro, l'erreur $\Delta \mu_{mo}$ induite sur la solution μ_{mo} tend aussi vers zéro).

Cependant, comme le rappelait la figure 3, il faut bien avoir conscience qu'il y aura toujours un écart entre les mesures obtenues par un système expérimental (regroupées dans le vecteur $\boldsymbol{\mu}$), et les sorties du modèle. Cet écart s'explique à la fois par les erreurs (c'est-à-dire les incertitudes) sur les mesures expérimentales et sur le modèle lui-même.

D'une part, si on note $\boldsymbol{\mu}^*$ le vecteur qui regroupe les valeurs exactes, mais inaccessibles, des mesures (c.à.d. les concentrations « vraies » qui seraient mesurées par un capteur idéal), l'écart

$$\mathbf{e}^\mu = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^* \quad (32)$$

s'appelle l'erreur de mesure. Cette erreur, qui affecte directement les composantes du vecteur $\boldsymbol{\mu}$, est due aux imprécisions des capteurs de concentration qui fournissent des mesures brutes bruitées. D'autre part, si on fait l'hypothèse que les observations $\boldsymbol{\mu}^*$ peuvent être construites à partir du modèle et de la valeur exacte et continue de la source $s^*(t, \mathbf{x})$, on a :

$$\boldsymbol{\mu}^* = \boldsymbol{\mu}_{mo}(s^*) + \mathbf{e}^m \quad (33)$$

L'erreur de modèle e^m provient de plusieurs causes. Tout d'abord elle est liée aux équations du modèle qui reposent forcément sur une idéalisation de la réalité physique et qui s'appuient i) sur des hypothèses simplificatrices et ii) sur des paramètres physiques qui ne sont connus que de manière expérimentale ou empirique (erreur de modélisation). Une autre source d'erreur importante provient de la description inévitablement imparfaite du champ de vent $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ (erreur dans les données d'entrée). Ce champ tridimensionnel, impossible à évaluer avec une résolution spatiale suffisante, provient généralement d'un modèle utilisé en amont du modèle de dispersion. On a donc :

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{mo}(s^*) + \mathbf{e}^o \quad (34)$$

où $\mathbf{e}^o \equiv \mathbf{e}^u + \mathbf{e}^m$ est l'erreur dite « d'observation ». Il est bien évident que, comme on ne connaît pas $s^*(t, \mathbf{x})$, cette erreur ne peut être décrite que de façon probabiliste.

3.3.2 *Problème inverse*

Un problème inverse consiste à reconstruire une grandeur inconnue à partir d'un modèle physique et de mesures expérimentales. En fonction de la grandeur inconnue, on distingue plusieurs types de problèmes inverses, :

- Si la grandeur inconnue est le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\beta}$ (ou une partie de ce vecteur) et que l'état initial et le terme source sont connus, le problème est dit « de caractérisation des paramètres physiques ».
- Si la grandeur inconnue est l'état initial et que le terme source et les paramètres physiques sont connus, le problème est dit « de reconstruction de l'état initial ».
- Si la grandeur inconnue est le terme source et que l'état initial et les paramètres physiques sont connus, le problème est dit « d'estimation du terme source » (Source Term Estimation -STE- problem, en anglais).

Dans ce document, seul ce dernier problème, schématisé figure 7, nous intéresse. Il consiste à combiner un modèle de dispersion, « utilisé à l'envers », avec des données expérimentales (c.à.d. mesurées sur le terrain) pour obtenir une estimation de la source $s_{est}(t, \mathbf{x})$.

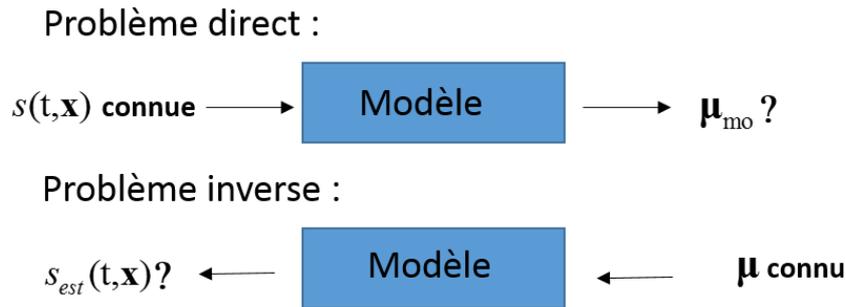


Fig. 7 : Problème direct VS Problème inverse

Mais ce problème n'est pas bien posé (ill-posed en anglais). En effet, contrairement au problème direct, l'existence, l'unicité, et/ou la continuité de la solution par rapport aux mesures ne sont pas toujours vérifiées. D'un point de vue physique, cela signifie notamment qu'un vecteur de mesure, $\boldsymbol{\mu}$, peut correspondre à un grand nombre de valeurs d'entrée, $s(t, \mathbf{x})$, ces dernières pouvant être fort éloignées les unes des autres... et de la valeur exacte, mais inconnue, de la source $s^*(t, \mathbf{x})$. Aussi faudra-t-il utiliser des techniques adaptées pour obtenir une estimation $s_{\text{est}}(t, \mathbf{x})$, unique et stable, de la source. Notons que l'écart entre $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\mu}_{\text{mo}}(s_{\text{est}})$ (c'est-à-dire l'écart entre les mesures et la sortie du modèle pour la source estimée) sera appelé le vecteur des résidus d'estimation :

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_{\text{mo}}(s_{\text{est}}) \quad (35)$$

L'écart entre $\boldsymbol{\mu}_{\text{mo}}(s_{\text{est}})$ et $\boldsymbol{\mu}_{\text{mo}}(s^*)$ sera appelé l'erreur de recalcul :

$$\mathbf{e}^{rc} = \boldsymbol{\mu}_{\text{mo}}(s_{\text{est}}) - \boldsymbol{\mu}_{\text{mo}}(s^*) \quad (36)$$

Ces écarts sont liés à l'erreur d'observation $\mathbf{e}^o \equiv \mathbf{r} + \mathbf{e}^{rc}$ mais, en pratique, seules les composantes de $\boldsymbol{\Gamma}$ sont accessibles. Les autres écarts ne peuvent être décrits que de façon probabiliste.

3.4 Le problème d'estimation du terme source

Pour simplifier la notation, à partir de ce paragraphe, le couple (t, \mathbf{x}) sera simplement noté \mathbf{X} . Il faudra donc interpréter \mathbf{X} non plus comme une coordonnée spatiale de D mais comme une coordonnée spatio-temporelle de $\Omega = [0, T] \times D$.

3.4.1 Formulation du problème

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la résolution du problème d'estimation du terme source inconnu $s^*(\mathbf{x})$ sous la forme d'une source estimée $s_{est}(\mathbf{x})$ définie en tout point \mathbf{x} de Ω . Cette approche est qualifiée de « non paramétrique » par référence à l'approche « paramétrique » qui sera décrite plus loin (sec. 5). Pour cela, on rappelle que la relation, linéaire, entre la fonction source et une observation réalisée en un point \mathbf{o} du domaine, $\mu(\mathbf{o}) \in \mathbb{R}$, peut s'écrire sous la forme d'une équation intégrale de type Fredholm de première espèce:

$$\mu(\mathbf{o}) = \int_{\Omega} a_{\mathbf{o}}(\mathbf{x})s(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \langle s, a_{\mathbf{o}} \rangle \quad \mathbf{o} \in \Omega \quad (37)$$

Si les observations sont réalisées aux points $\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_m \in \Omega$, en posant $a_{\mathbf{o}_i}(\mathbf{x})=a_i(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{o}_i)=\mu_i$ on obtient m équations :

$$\mu_i = \int_{\Omega} s(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \langle s, a_i \rangle \quad i = 1 \dots m \quad (38)$$

Le problème d'estimation du terme source peut être mis sous la forme, assez générale, proposée pour la première fois par Backus et Gilbert (1968, 1970) dans le domaine de la géophysique et rappelée par Bertero et al. (1985) :

- Soit l'espace vectoriel E , soient les fonctions $a_i(\mathbf{x}) \in E, i = 1 \dots m$
 et soient les mesures $\mu_i \in \mathbb{R}$, trouver la fonction $s(\mathbf{x}) \in E$ telle que P-1

$$\mu_i = \int_{\Omega} s(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x})d\mathbf{x} \quad i = 1 \dots m .$$

Estimer une fonction continue, ici $s(\mathbf{x})$, à partir de données discrètes, ici $\mu(\mathbf{o}_1), \dots, \mu(\mathbf{o}_m)$, constitue toujours un problème inverse mal posé. En effet, une fonction continue représente un vecteur ayant un nombre infini de composantes qu'il est impossible d'estimer à partir d'un nombre fini de mesures. Le problème possède une infinité de solution : on dit qu'il est sous-déterminé.

3.4.2 Solution de norme minimale

On suppose que les fonctions adjointes sont linéairement indépendantes et on note E_m le sous espace de E , de dimension m , engendré par les fonctions a_i . Soit E_m^\perp son complément orthogonal, $E_m^\perp = \{f \in E \mid \langle f, g \rangle = 0 \forall g \in E_m\}$.

Toutes les solutions $s(\mathbf{x})$ du problème d'estimation du terme source peuvent être décomposées sous la forme :

$$s(\mathbf{x}) = s_{//}(\mathbf{x}) + s_{\perp}(\mathbf{x}), \text{ où } s_{//} \in E_m \text{ et } s_{\perp} \in E_m^{\perp} \quad (39)$$

Puisque tout élément de E_m est orthogonal à tout élément de E_m^{\perp} , on a $\langle s_{\perp}, a_i \rangle = 0$. $s_{//}$ est donc la seule composante qui contribue aux mesures. D'ailleurs certains, comme Bertero et al. (1985), nomment s_{\perp} la « composante invisible ».

De plus, puisque $\langle s, a_i \rangle = \langle s_{//}, a_i \rangle = \mu_i$, $s_{//}(\mathbf{x})$ est aussi solution du problème : c'est l'unique élément de E_m solution du problème. En effet, si l'on considère deux éléments de E_m , $s_{//1}$ et $s_{//2}$, solutions du problème, on a $\langle s_{//1}, a_i \rangle = \mu_i$ et $\langle s_{//2}, a_i \rangle = \mu_i$. Ceci implique que $\langle s_{//2} - s_{//1}, a_i \rangle = 0$ avec $s_{//2} - s_{//1} \in E_m$, soit $s_{//2} = s_{//1}$. On peut également montrer que $s_{//}$ est aussi la solution de norme minimale. En effet, puisque $s_{//}$ et s_{\perp} sont orthogonales, le théorème de Pythagore donne $\|s\|^2 = \|s_{//}\|^2 + \|s_{\perp}\|^2$ ce qui prouve que $\|s\| > \|s_{//}\|$ sauf dans le cas où $s = s_{//}$.

On voit donc que, si les fonctions adjointes sont linéairement indépendantes, le problème possède une unique solution de norme minimale, combinaison linéaire de ces fonctions

$$s_{//} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \quad (40)$$

Pour obtenir une expression explicite de $s_{//}$, Issartel et al. (2007) introduisent les notations suivantes : $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})]^T$, $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_m]^T$ et $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T$. Les équations (16) et (40) s'écrivent alors respectivement :

$$\boldsymbol{\mu} = \int_{\Omega} \mathbf{a}(\mathbf{x}) s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (41)$$

et

$$s_{//}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} \quad (42)$$

En remplaçant, dans (41), s par l'expression de $s_{//}$ donnée par (42), on obtient $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ où les composantes de la matrice symétrique \mathbf{H} sont $H_{ij} = \int_{\Omega} a_i(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle a_i, a_j \rangle$ $i, j = 1 \dots m$. Cette matrice est une matrice dite « de Gram » : ses composantes correspondent au produit

scalaire des fonctions $a_i(\mathbf{x})$ et $a_j(\mathbf{x})$. En remplaçant λ par son expression, dans (42), on obtient une solution du problème sous la forme

$$s_{//}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{x})\mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mu} \text{ ou } s_{//}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (43)$$

Cette relation montre clairement que la solution choisie dépend continûment des données d'entrée (mesures) : si l'observation $\boldsymbol{\mu}$ est affectée d'une perturbation $\Delta\boldsymbol{\mu}$, la solution inverse $s_{//}$ sera affectée d'une erreur $\Delta s_{//}$ qui tend vers 0 lorsque $\|\Delta\boldsymbol{\mu}\|$ tend vers 0. Le problème du calcul de la solution de norme minimale est donc bien posé. De plus, le calcul de $s_{//}(\mathbf{x})$ ne contient d'éventuelles instabilités numériques que si la matrice \mathbf{H} est mal conditionnée. Or, si les fonctions $a_i(\mathbf{x})$ sont suffisamment différentes les unes des autres, c'est-à-dire si le réseau de capteurs a été bien conçu, \mathbf{H} est bien conditionnée. Notons que si cela n'avait pas été le cas, le problème aurait pu être corrigé en utilisant des méthodes de régularisation qui permettent d'obtenir une solution de norme minimum régularisée (Bertero et al., 1988).

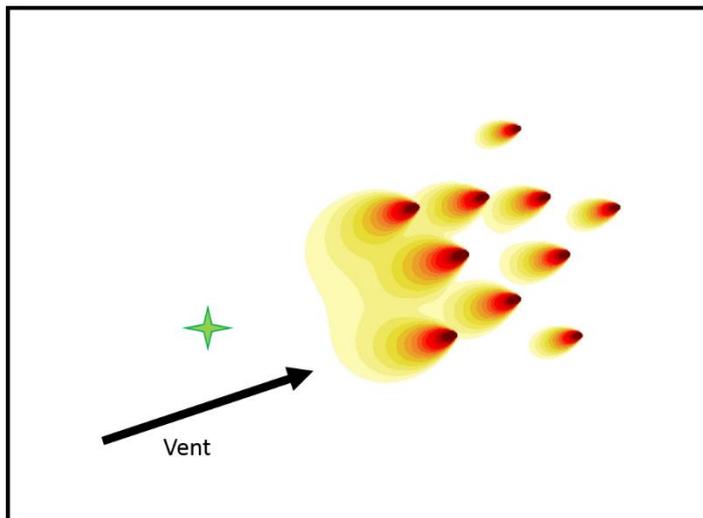


Fig. 8 : Solution de norme minimale, $s_{//}(\mathbf{x})$

La caractéristique principale de $s_{//}$ est qu'elle possède un biais intrinsèque pouvant conduire à de fausses interprétations : elle pénalise les sources qui se trouvent loin des points de mesures et fournit des distributions de sources ayant des maxima locaux situés près du réseau de mesure (voir figure 8). En effet, en observant les fonctions d'influence on s'aperçoit qu'elles atteignent leur maximum à proximité des points de mesure et qu'elles décroissent rapidement au fur et à mesure que l'on s'en éloigne (elles présentent même des sensibilités infinies vis-à-vis des

sources localisées aux points de mesure). Ainsi, à intensité égale, une mesure sera beaucoup plus sensible à une source proche qu'à une source éloignée. Cette propriété est répercutée au niveau de l'estimation (43) qui aura tendance à privilégier les sources proches au détriment de celles plus éloignées. L'objectif initial de la méthode de renormalisation, proposée par J.P. Issartel (2005), était de corriger cet effet.

3.4.1 Solution de norme minimale pondérée

Pour corriger le défaut de la solution de norme minimale, Issartel a introduit dans l'équation (16) une fonction de pondération $f(\mathbf{x}) \in E$ telle que :

$$\mu_i = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) \frac{a_i(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (44)$$

Il a attribué, à cette fonction, un poids total égal au nombre de mesures, soit $\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = m$.

Ensuite, il a défini un nouveau produit scalaire:

$$\langle g, h \rangle_f = \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall g, h \in E \quad (45)$$

et une nouvelle norme pondérée :

$$\|g\|_f = \left(\int_{\Omega} g(\mathbf{x})^2 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2} = \langle g, g \rangle_f \quad \forall g \in E \quad (46)$$

En introduisant la notation suivante : $\mathbf{a}_f(\mathbf{x}) = [a_{f_1}(\mathbf{x}), \dots, a_{f_m}(\mathbf{x})]^T$, où $a_{f_i}(\mathbf{x}) = \frac{a_i(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x})}$, le

problème revient à trouver la solution de norme pondérée minimale vérifiant

$$\boldsymbol{\mu} = \int_{\Omega} s(\mathbf{x}) \mathbf{a}_f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle s, \mathbf{a}_f \rangle_f \quad (47)$$

Cette solution s'exprime sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions adjointes pondérées

$$s_{//f} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{f_i} = \mathbf{a}_f^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\lambda} \quad (48)$$

En substituant cette expression dans (47), on obtient $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{H}_f^{-1} \boldsymbol{\mu}$ où les composantes de la matrice symétrique \mathbf{H}_f sont $H_{f_{ij}} = \int_{\Omega} a_{f_i}(\mathbf{x}) a_{f_j}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \langle a_{f_i}, a_{f_j} \rangle_f$ $i, j = 1 \dots m$. En remplaçant $\boldsymbol{\lambda}$ par son expression, dans (48), on obtient la solution de norme minimale pondérée du problème sous la forme

$$s_{//f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_f^T(\mathbf{x})\mathbf{H}_f^{-1}\boldsymbol{\mu} \text{ ou } s_{//f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{H}_f^{-1}\mathbf{a}_f(\mathbf{x}) \quad (49)$$

Le problème a consisté ensuite à choisir une fonction $f(\mathbf{x})$ qui soit la « meilleure » selon un critère à déterminer. En particulier, on attend de la fonction choisie qu'elle évite à l'estimation $s_{//f}$ d'atteindre systématiquement son maximum global et des maxima locaux à proximité des points de mesures.

3.4.2 Cas particulier d'une source ponctuelle

Un critère d'optimalité pour le choix de la fonction de pondération, est obtenu par des considérations assez simples et naturelles. En effet, on peut remarquer que, quel que soit le vecteur de mesure, la solution donnée par (49) est une fonction continue de l'espace et du temps et correspond à une source dite distribuée (au sens spatio-temporel). Or, en situation opérationnelle, la source réelle a souvent une dimension très petite par rapport au domaine et peut être assimilée à une source ponctuelle, d'intensité q_s , localisée, en espace et en temps, au point \mathbf{x}_s . En effet, dans le cadre de la menace biologique ou chimique, les émissions correspondent souvent à des rejets de substances toxiques, instantanés ou de courte durée, sur une zone de faible étendue, à partir du sol ou dans l'air à proximité du sol. De même, dans le cadre des risques technologiques, une fuite transitoire à l'intérieur d'un site classé peut être considérée, sur une journée et à l'échelle d'une ville ou d'un département, comme étant un phénomène ponctuel. De telles sources s'expriment sous la forme $s(\mathbf{x})=q_s\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)$. Dans ce cas, l'équation (41) donne :

$$\boldsymbol{\mu}=q_s\mathbf{a}(\mathbf{x}_s) \quad (50)$$

Pour un tel vecteur de mesure la solution de norme minimale pondérée est :

$$s_{//f}(\mathbf{x}) = q_s f(\mathbf{x}_s)\mathbf{a}_f^T(\mathbf{x}_s)\mathbf{H}_f^{-1}\mathbf{a}_f(\mathbf{x}) \quad (51)$$

Dans ce cas, $s_{//f}(\mathbf{x})$ peut être interprétée comme étant une source ponctuelle « vue avec la capacité de résolution limitée du réseau de mesure ». Avec un nombre fini d'informations (c'est-à-dire de mesures) :

- il n'est pas possible de percevoir une émission ponctuelle avec une netteté infinie,
- il est difficile de la localiser correctement.

En particulier, on remarque que la fonction $s_{//f}(\mathbf{x})$ atteint son maximum lorsque la fonction $R_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) = \mathbf{a}_f^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{H}_f^{-1} \mathbf{a}_f(\mathbf{x})$ atteint le sien. Or nous avons vu que, dans le cas où $f=1 \forall \mathbf{x} \in \Omega$ (solution de norme minimale) et lorsque \mathbf{x}_s est éloignée des points de mesures (c'est-à-dire lorsque les composantes du vecteur $\mathbf{a}(\mathbf{x}_s)$ sont faibles), ce maximum est localisé dans les régions où les composantes du vecteur $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ sont grandes (c'est-à-dire à proximité des points de mesures).

3.5 La solution renormalisée

La fonction de pondération $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ définie par Issartel (2005) permet d'obtenir une solution pour laquelle la fonction $R_f(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})$ atteint son maximum exactement en \mathbf{x}_s , quelle que soit la position de ce point vis-à-vis du réseau de mesure. Cette fonction vérifie les trois conditions suivantes :

$$(i) \varphi(\mathbf{x}) > 0, (ii) \int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = m, (iii) \mathbf{a}_{\varphi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{H}_{\varphi}^{-1} \mathbf{a}_{\varphi}(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (52)$$

La troisième relation, dite de renormalisation, peut aussi être exprimée sous la forme

$$(iii) R_{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1 \quad (53)$$

ou encore

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \mathbf{H}_{\varphi}^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \varphi^2(\mathbf{x}) \quad (54)$$

Dans ce cas, la solution pondérée (49) s'exprime sous la forme

$$s_{//\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_{\varphi}^T(\mathbf{x}) \mathbf{H}_{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (55)$$

Ainsi, une source ponctuelle $s(\mathbf{x}) = q_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ sera estimée par la solution renormalisée :

$$s_{//\varphi}(\mathbf{x}) = q_s \varphi(\mathbf{x}_s) R_{\varphi}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \text{ avec } R_{\varphi}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) = \mathbf{a}_{\varphi}^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{H}_{\varphi}^{-1} \mathbf{a}_{\varphi}(\mathbf{x}) \quad (56)$$

Puisque la matrice $\mathbf{H}_{\varphi}^{-1}$ est une matrice de Gram, définie positive, on remarque que la fonction $R_{\varphi}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})$ s'exprime sous forme d'un produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwartz et la condition de renormalisation entraînent alors

$$|R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})| \leq \underbrace{\sqrt{\mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x}_s)}}_1 \underbrace{\sqrt{\mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x})}}_1 = 1 \quad (57)$$

Comme $R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s) = 1$ on a bien $|R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})| \leq |R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s)| \forall \mathbf{x} \in \Omega$ et donc, grâce à la condition de renormalisation, la fonction $R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})$ (et donc la fonction $s_{//\varphi}(\mathbf{x})$) possède, à l'instar de la fonction $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)$, un pic en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$. La valeur de R_φ au niveau de ce pic est égale à 1. Ainsi, en l'absence de bruit, et sans avoir besoin de faire d'hypothèse a priori, si l'émission provient d'une source ponctuelle localisée en \mathbf{x}_s (voir figure 9) alors la solution renormalisée atteindra son maximum en ce point :

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{s_{//\varphi}(\mathbf{x})\} = s_{//\varphi}(\mathbf{x}_s) = q_s \varphi(\mathbf{x}_s) \quad (58)$$

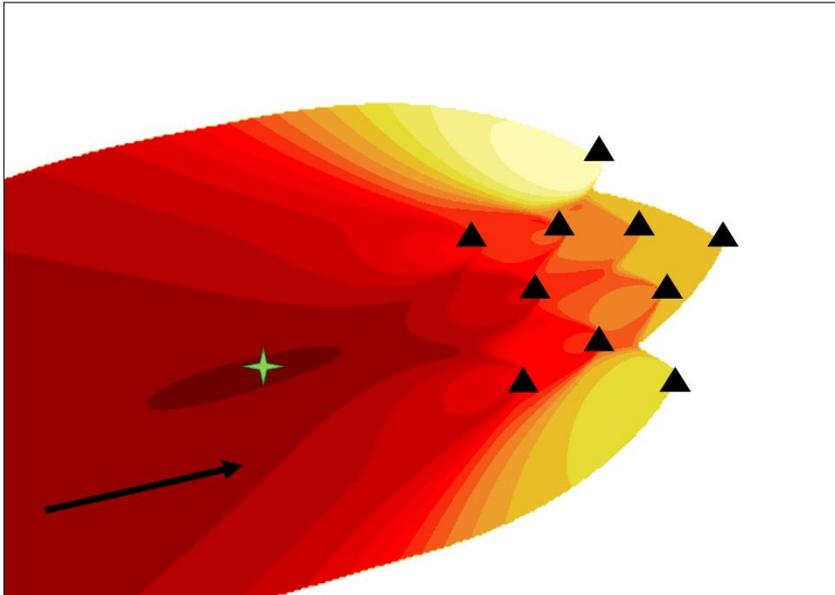


Fig. 9 : Solution renormalisée du problème, $s_{//\varphi}(\mathbf{x})$

Pour obtenir la fonction $\varphi(\mathbf{x})$, (Issartel, 2005) a proposé le schéma itératif suivant :

$$\varphi_{\alpha+1}(\mathbf{x}) = \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \sqrt{\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \mathbf{H}_{\varphi_\alpha}^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{x})} \text{ avec } \varphi_0(\mathbf{x}) = 1 \quad (59)$$

où l'indice « α » désigne le numéro de l'itération. Dans des travaux non publiés, J.P Issartel a montré que ce schéma converge toujours vers la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ vérifiant les conditions de renormalisation (52) et que, parmi toutes les fonctions de pondération $f(\mathbf{x})$ possibles, $\varphi(\mathbf{x})$ est celle pour laquelle le déterminant de la matrice \mathbf{H}_f est minimum.

$$\varphi(\mathbf{x}) = \arg \min_{f(\mathbf{x})} \{ \det \mathbf{H}_f \} \quad (60)$$

Dès 2007, le schéma (59) a été utilisé dans un algorithme écrit en Fortran 77. Cet algorithme est efficace mais relativement complexe (composé de multiples boucles imbriquées, très gourmandes en temps de calculs et en mémoire). Un nouvel algorithme, plus efficace, a été proposé récemment (nous reviendrons sur ce point ultérieurement au paragraphe 4.6).

3.5.1 $\varphi(\mathbf{x})$ comme fonction de visibilité associée à un réseau de mesure

La fonction $\varphi(\mathbf{x})$ est généralement interprétée comme étant une fonction (dite de visibilité) qui permet de décrire, pour des conditions météorologiques données et préalablement à toute mesure, l'aptitude d'un éventuel rejet à être détecté et identifié par le réseau de mesure selon la région dans laquelle il se produit.

Notion de détectabilité

Pour bien comprendre cette notion, il faut rappeler qu'une mesure réalisée au point \mathbf{o} , correspond au comptage des particules passées par ce point. Or, compte tenu des conditions météorologiques, ces particules ne peuvent provenir que de certaines régions de l'espace et du temps. Ces régions, situées au vent du capteur, sont les zones dites « couvertes », ou « vues », par le capteur (elles sont aussi appelées zone de détection du capteur). Un éventuel rejet depuis une de ces zones est dit « détectable » s'il est en capacité de déclencher une mesure non nulle.

Il est évident que l'aptitude d'un rejet à être détecté est fonction de sa position vis-à-vis du capteur mais aussi de son intensité. En effet, si le rejet a lieu dans une zone très éloignée et/ou si son intensité est trop faible, le nombre de particules susceptibles d'atteindre le capteur est insuffisant. L'aptitude d'un capteur, localisé en \mathbf{o} , à détecter un rejet ponctuel est parfaitement décrite par la fonction d'influence $a_{\mathbf{o}}(\mathbf{x})$ (voir figure 5). On note C_{\min} la limite de sensibilité du capteur (c'est-à-dire la concentration minimale qu'il est capable de détecter). Un rejet ponctuel unitaire (c.à.d. un rejet dont le débit est égal à une unité de masse par seconde, $1u/s$) sera détecté par ce capteur à condition que $a_{\mathbf{o}}(\mathbf{x}) \geq C_{\min}$. Cette inégalité caractérise la zone de détectabilité d'un rejet unitaire.

De même, la zone plus étendue pour laquelle $a_{\mathbf{o}}(\mathbf{x}) \geq C_{\min} / 10$, correspond à la zone dans laquelle un rejet potentiel, dont le débit vaut au moins $10u/s$, génère une mesure non nulle. Enfin, les zones où $a_{\mathbf{o}}(\mathbf{x})=0$ sont les zones pour lesquelles le capteur est aveugle, c'est-à-dire

les zones à partir desquelles les particules n'ont aucune chance d'atteindre le point \bullet . Si maintenant on considère un réseau de mesure, caractérisé par m fonctions adjointes $a_{0_i}(\mathbf{x})=a_i(\mathbf{x})$, la détectabilité d'un rejet augmentera s'il se trouve dans une zone surveillée simultanément par plusieurs capteurs (voir figure 10).

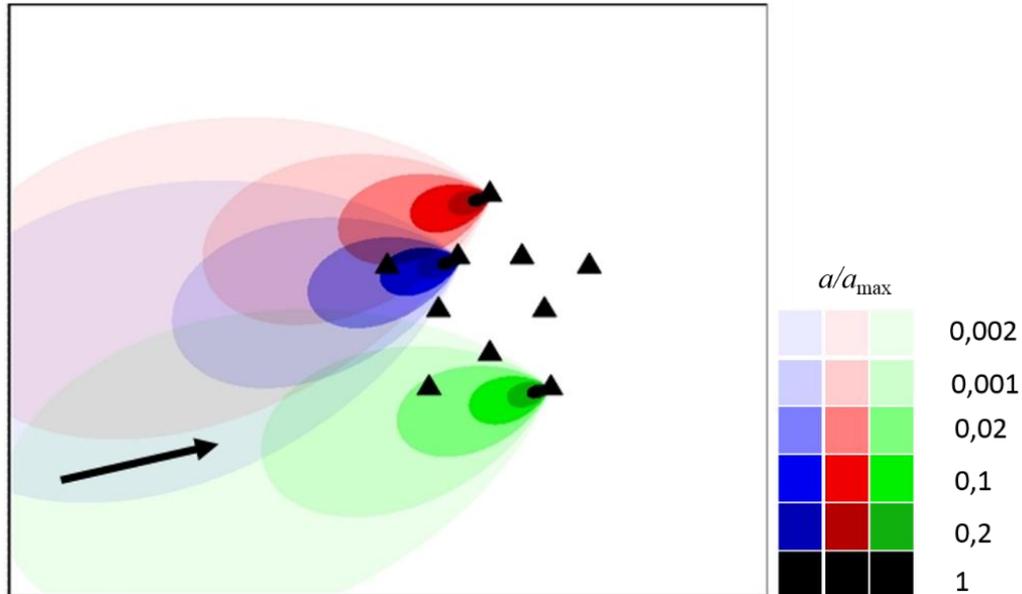


Fig. 10 : Fonctions d'influence de plusieurs capteurs.

Il est alors possible d'utiliser la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ afin de définir la visibilité globale du réseau (voir figure 11).

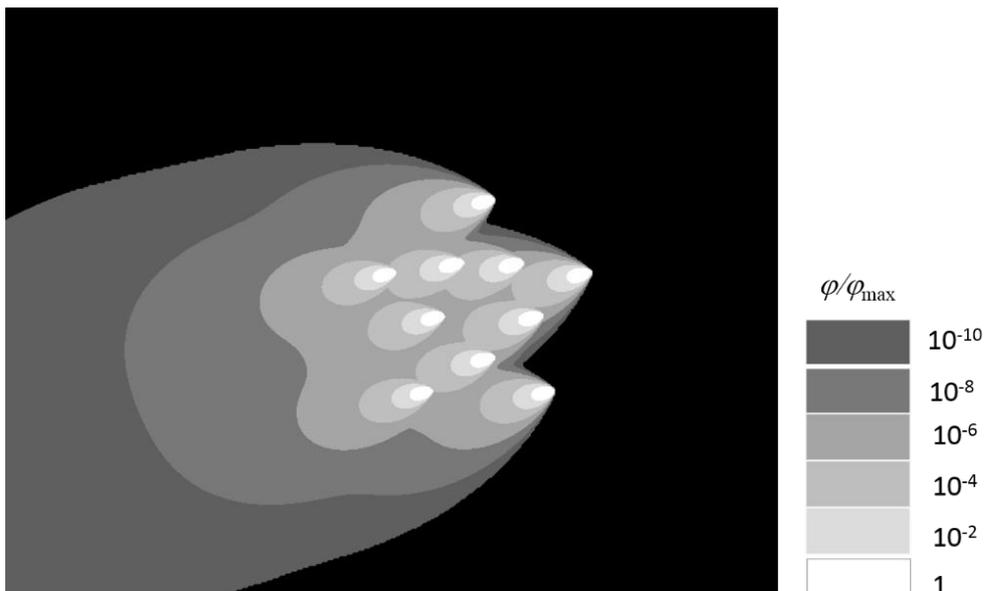


Fig. 11 : Fonction de visibilité du réseau de mesure.

En effet :

- $\varphi(\mathbf{x})$ prend de grandes valeurs dans les régions proches des points de mesure et dans les régions où il y a un fort recouvrement des fonctions $a_i(\mathbf{x})$ (zones surveillées simultanément par plusieurs capteurs),
- $\varphi(\mathbf{x})$ décroît rapidement lorsqu'on s'éloigne des points de mesures,

$\varphi(\mathbf{x})$ est nulle dans les régions où les fonctions $a_i(\mathbf{x})$ sont toutes nulles (zones non couvertes par le réseau de mesures). Après avoir remarqué que la relation (ii) donne $\int_{\Omega} \frac{\varphi(\mathbf{x})}{m} d\mathbf{x} = 1$, il est même possible d'interpréter la valeur $\frac{\varphi(\mathbf{x})}{m} d\mathbf{x}$ comme étant la probabilité qu'une émission unitaire, située dans un volume $d\mathbf{x}$ autour de \mathbf{X} , soit détectée par le réseau de mesures. En effet, les émissions de polluant qui ont lieu dans des zones où la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ est grande (c'est-à-dire dans les zones proches, au vent des points de mesures et couvertes par plusieurs détecteurs), ont une plus forte probabilité d'être détectées que celles issues des zones où la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ est faible. Attention, il ne faut surtout pas confondre cette probabilité avec celle qu'une émission ait lieu dans un volume $d\mathbf{x}$ autour de \mathbf{X} .

Notion d'identifiabilité

Un rejet est dit identifiable par un réseau de mesures s'il est possible de déterminer les valeurs des paramètres qui le caractérisent (localisation, Intensité...) à partir des observations réalisées par ce réseau. L'aptitude d'un rejet à être identifié dépend de sa position vis-à-vis du réseau et peut également être décrite par la fonction $\varphi(\mathbf{x})$. En effet, équation (56), nous avons vu que, dans le cas d'un rejet ponctuel, la solution renormalisée s'exprime sous la forme :

$$s_{//\varphi}(\mathbf{x}) = q_s \varphi(\mathbf{x}_s) R_{\varphi}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \quad (61)$$

Puisque la fonction $R_{\varphi}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})$ possède un pic en $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$ égal à 1, si l'émission provient d'une source ponctuelle localisée en \mathbf{x}_s , alors la solution renormalisée atteindra son maximum en ce point. La valeur de ce maximum sera égal à $q_s \varphi(\mathbf{x}_s)$ mais la forme de la fonction autour de \mathbf{x}_s dépendra de la valeur de la fonction φ au point d'émission. En effet, on peut montrer que le carré de la norme pondérée de la fonction $R_{\varphi}(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})$ est égal à l'unité :

$$\begin{aligned}
 \|R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})\|^2 &= \int_{\Omega} R_\varphi^2(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega} \left[\mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x}) \right]^2 \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
 &= \mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x}_s) \\
 &= \mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{H}_\varphi \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x}_s) \\
 &= \mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}_s) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x}_s) = 1
 \end{aligned} \tag{62}$$

Puisque $\int_{\Omega} R_\varphi^2(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ et comme l'intégrande est positif, cela signifie que la fonction $R_\varphi^2(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})$ prend soit de grandes valeurs sur une petite partie du domaine, soit de petites valeurs sur une grande partie du domaine. De plus, nous avons montré que $|R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})| \leq 1$ et $|R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_s)| = 1$. Ainsi, nous pouvons rencontrer deux types de situation extrêmes :

1. Si la valeur de $\varphi(\mathbf{x}_s)$ est relativement élevée, le maximum de la fonction $R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})$ est très marqué (« sharp maximum », en anglais). Les zones dans lesquelles les valeurs de $s_{//\varphi}(\mathbf{x})$ sont proches du maximum sont très peu étendues. La source est clairement identifiable : l'incertitude sur sa localisation et son intensité est relativement faible et insensible au bruit.
2. Si la valeur de $\varphi(\mathbf{x}_s)$ est relativement faible, le maximum de la fonction $R_\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x})$ est très peu marqué (« flat maximum », en anglais). En conséquence, les zones dans lesquelles les valeurs de $s_{//\varphi}(\mathbf{x})$ sont proches du maximum sont très étendues. La source est difficilement identifiable : l'incertitude sur sa localisation et son intensité est relativement forte et sensible au bruit.

Le terme visibilité prend alors tout son sens : la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ caractérise la vision du réseau. Dans les zones où φ est faible, le réseau de mesures ne perçoit plus correctement tous les détails du rejet. La fonction $s_{//\varphi}(\mathbf{x})$ apparait « plate » et son pic n'est pas assez marqué pour être clairement identifié. Il est donc difficile d'évaluer correctement la localisation et l'intensité de la source. Au contraire, lorsque la source se situe dans une zone où φ est relativement élevée, le pic sera clairement vu par le réseau et l'on pourra mieux déterminer toutes ses caractéristiques.

Ce phénomène peut être décrit simplement à partir d'une analogie avec la vision humaine : si un objet est proche de nous, nos yeux voient distinctement tous ses détails et notre cerveau est capable d'évaluer sa taille et sa position exacte dans l'espace. Au contraire, si l'objet est loin de nos yeux, ses détails ne sont plus nettement visibles (ou ont totalement disparus), notre cerveau a plus de difficultés à évaluer sa taille et sa position relative par rapport à d'autres objets (on peut prendre comme exemple notre perception des étoiles qui apparaissent toutes comme des points de même taille localisés sur une sphère sans épaisseur, à une distance indéterminée).

3.5.2 Définition de la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ dans le cadre d'une approche entropique

Dans un paragraphe précédent, nous avons indiqué, qu'initialement, la fonction $\varphi(\mathbf{x})$ avait été choisie comme fonction de pondération, parmi toutes les fonctions de pondération $f(\mathbf{x})$ compatibles, car elle permettait d'éviter que la solution pondérée $s_{//f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_f^T(\mathbf{x})\mathbf{H}_f^{-1}\boldsymbol{\mu}$ ne présente des maxima à proximité des points de mesures. Issartel et al. (2007, 2011) ont formulé l'hypothèse selon laquelle ces maxima sont, en réalité, des artefacts dus à un surplus d'informations indûment introduit dans le problème lors de l'interprétation des données. En effet, pour résoudre le problème inverse, il est inévitable d'utiliser de nouvelles informations qui viennent s'ajouter à celle déjà fournie par les mesures. Afin de ne pas fausser les résultats, cet ajout d'informations doit être le plus faible possible.

La théorie de l'information est étroitement liée à celle de l'entropie : un gain d'information est l'équivalent d'une perte d'entropie. Busch (2015) rappelle qu'en mécanique statistique, Boltzmann définit l'entropie d'un gaz, notée S , comme étant le logarithme du nombre de micro-états associés à un macro-état donné. Il propose donc de définir l'entropie comme étant le logarithme du nombre de sources ayant pu générer les données observées. Interpréter les mesures consiste donc à utiliser de l'information pour choisir une source parmi cet ensemble de sources possibles. Ce choix entraîne une variation d'entropie $\Delta S = S_{after} - S_{before}$ où S_{after} et S_{before} désignent respectivement l'entropie avant et après l'interprétation. Le processus qui utilise le moins d'information est donc celui pour lequel la variation ΔS est la plus faible. Puisque $S_{after} < S_{before}$, ΔS est négatif et doit donc être maximisé. Pour cela, on remarque, qu'après l'interprétation, toutes les sources sont exclues sauf une et donc $S_{after} = \log(1) = 0$, soit $\Delta S = -S_{before}$. Pour maximiser ΔS il faut donc minimiser S_{before} . Or, avant interprétation, toutes les sources engendrées par les fonctions a_i / f sont possibles et l'entropie S_{before} est égale

à l'infini. Mais Bush (2015) montre que ce résultat provient de l'hypothèse, erronée, selon laquelle les sources potentielles appartiennent à un espace vectoriel continu infini. En réalité, les sources potentielles appartiennent à un espace vectoriel discret. En effet, une mesure correspond toujours au décompte d'un évènement élémentaire (passage de particules par exemple). Ainsi, les mesures prennent des valeurs discrètes $\mu_i = k_i \delta$ avec $k_i \in \mathbb{Z}$ et $\delta > 0$ (ce résultat se généralise si chaque capteur possède son propre δ_i) et l'espace qui contient l'ensemble des sources possibles est discret $\{\delta \mathbf{k}^T \mathbf{H}_f^{-1} \mathbf{a} / f, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^m\}$. Cet espace est un hypercube constitué de cellules identiques de volume $V_{cell} = \delta^m / \sqrt{\det(\mathbf{H}_f)}$. Le nombre de sources possibles à l'intérieur de cet espace étant lui-même infini, Busch propose de raisonner sur le nombre de source à l'intérieur d'un volume V donné. Ce nombre est égal à V / V_{cell} . La variation d'entropie est alors égale à

$$\Delta S = -\log\left(\frac{V}{\delta^m}\right) - \frac{1}{2} \log(\det(\mathbf{H}_f)) \quad (63)$$

Maximiser la variation d'entropie ΔS revient donc à minimiser $\det(\mathbf{H}_f)$, c'est-à-dire à choisir $f = \varphi$.

3.5.3 Géométrie apparente au réseau de mesures

Nous avons déjà noté que la matrice \mathbf{H}_φ^{-1} permet de définir un produit scalaire dans l'espace des mesures. Ce produit scalaire induit une géométrie propre au réseau de mesures (dite « géométrie apparente »). En effet, il permet de définir la norme des vecteurs de dimension m :

$$\|\xi\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}} = (\xi^T \mathbf{H}_\varphi^{-1} \xi)^{1/2} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m \quad (64)$$

et les angles qu'ils forment les uns avec les autres :

$$\cos \theta = \frac{\xi^T \mathbf{H}_\varphi^{-1} \zeta}{\|\xi\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}} \|\zeta\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}}} \quad \forall \xi, \zeta \in \mathbb{R}^m \quad (65)$$

Dans cette géométrie, l'intensité des signaux mesurés ne vaut pas $\|\mu\|$ mais $\|\mu\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}}$. De même, puisque les vecteurs $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x})$ appartiennent à l'espace des mesures, leurs normes valent :

$$\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}} = \sqrt{\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{x})} = \varphi(\mathbf{x}) \quad (66)$$

et

$$\|\mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}} = \sqrt{\mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x})\mathbf{H}_\varphi^{-1}\mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x})} = 1, \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (67)$$

On reconnaît dans ces deux relations de nouvelles expressions de la condition de renormalisation (52-iii). La première permet d'interpréter $\varphi(\mathbf{x})$ comme étant l'intensité apparente du signal généré par une source ponctuelle en \mathbf{x} , le mot « unitaire » étant pris ici au sens de la géométrie euclidienne ordinaire. La seconde montre que le réseau perçoit tous les rejets ponctuels, d'intensité $1/\varphi(\mathbf{x})$ (au sens de la géométrie euclidienne ordinaire), avec la même intensité apparente égale à l'unité.

De façon similaire, la norme pondérée définie par l'équation (46), pour $f = \varphi$,

$$\|g\|_\varphi = \left(\int_\Omega g(\mathbf{x})^2 \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \forall g \in E \quad (68)$$

permet, de définir l'intensité apparente des sources. On montre facilement que la norme de la solution renormalisée est :

$$\begin{aligned} \|s_{//\varphi}(\mathbf{x})\|_\varphi^2 &= \int_\Omega s_{//\varphi}^2(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_\Omega \left[\mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}_o) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \boldsymbol{\mu} \right]^2 \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_\varphi^{-1} \left(\int_\Omega \mathbf{a}_\varphi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_\varphi^{-1} \mathbf{H}_\varphi \mathbf{H}_\varphi^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_\varphi^{-1} \boldsymbol{\mu} = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}}^2 \end{aligned} \quad (69)$$

Enfin, dans le cas particulier d'une source ponctuelle $s(\mathbf{x}) = q_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ qui génère, en l'absence de bruit, une mesure $\boldsymbol{\mu} = q_s \mathbf{a}(\mathbf{x}_s)$, il est facile de montrer que les cinq grandeurs suivantes sont égales :

$$(a) \|s_{//\varphi}(\mathbf{x})\|_\varphi, (b) \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}}, (c) q_s \varphi(\mathbf{x}_s), (d) \max_{\mathbf{x} \in \Omega} [s_{//\varphi}(\mathbf{x})], (e) s_{//\varphi}(\mathbf{x}_s) \quad (70)$$

L'égalité entre (a) et (c) nous montre que

$$\varphi(\mathbf{x}_s) = \frac{\|s_{//\varphi}(\mathbf{x})\|_\varphi}{q_s} \quad (71)$$

c'est-à-dire que le rapport entre l'intensité apparente et l'intensité réelle de la source correspond justement à la visibilité de la source.

3.6 Bilan de la section

Nous avons présenté le cadre théorique / mathématique dans lequel a été développé la méthode de renormalisation. Cette dernière vise à reconstruire une source d'émission à partir d'observations réalisées par un réseau de capteurs. Elle s'appuie sur le fait qu'une mesure, réalisée en un point donné, peut être exprimée sous la forme d'un produit scalaire entre la fonction recherchée et une fonction dite d'influence. On obtient cette fonction en utilisant un modèle adjoint.

Dans le cas du transport atmosphérique, nous avons montré (i) que le modèle adjoint se déduit assez facilement du modèle direct (en changeant le signe de certains termes), (ii) qu'une fonction adjointe peut être interprétée physiquement comme étant un « r tropanache ». Cette fonction décrit la sensibilité de l'observation, réalisée en un point donné, vis-à-vis d'éventuelles émissions élémentaires qui pourraient se produire dans les différentes parties de l'espace et du temps.

Nous avons ensuite montré que, si les fonctions d'influences de tous les capteurs sont connues, le problème inverse peut être formulé sous forme d'équations intégrales de première espèce. Lorsque le problème est présenté de cette façon, il est possible de le résoudre en calculant sa solution dite « de norme minimale ». Mais cette approche conduit à des « artefacts inacceptables » qui sont corrigés en introduisant, dans le problème, une fonction de pondération φ , appelée fonction de visibilité. Dans ce cas, la solution obtenue manifeste un certain nombre de propriétés remarquables. En particulier, lorsque les mesures analysées sont engendrées par une émission ponctuelle et instantanée, la fonction d'émission a son maximum au lieu et à la date de l'émission.

De plus, nous avons montré que la fonction de visibilité permet de décrire l'aptitude d'un rejet ponctuel à être détecté et caractérisé par un réseau de capteurs. Enfin, nous avons vu que cette fonction peut être définie en terme d'entropie et permet de définir une géométrie apparente au réseau de mesure.

4. RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE DISCRET DANS LE CADRE D'UNE APPROCHE NON PARAMETRIQUE

L'étape préliminaire à la résolution numérique d'un problème est sa discrétisation. Un de nos premiers objectifs a donc été de transposer le problème présenté section 3 dans un domaine discret, puis de proposer une solution renormalisée discrète et un algorithme performant pour la calculer. Nous précisons que cette partie du mémoire est partiellement basé sur nos articles [A5], [A6], [A9] et [A12].

4.1 Définition du problème

4.1.1 Discrétisation du problème

On rappelle que l'équation intégrale (38) peut être mise sous la forme :

$$(As)(\mathbf{o}) = \int_{\Omega} a_{\mathbf{o}}(\mathbf{x})s(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mu(\mathbf{o}), \quad \mathbf{o} \in \Omega \quad (72)$$

où A est un opérateur de E dans \mathbb{R} (c'est un opérateur intégral de noyau a) et s la fonction continue, inconnue. Si on dispose de m mesures, réalisées aux points $\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_m \in \Omega$, on peut ainsi introduire un opérateur semi-discret \mathbf{A} , de E dans \mathbb{R}^m , tel que $\mathbf{A}s = [(As)(\mathbf{o}_1), \dots, (As)(\mathbf{o}_m)]^T$. Soit le vecteur de mesure $\boldsymbol{\mu} = [\mu(\mathbf{o}_1), \dots, \mu(\mathbf{o}_m)]^T$, les m équations (38) s'expriment alors sous la forme simplifiée :

$$\mathbf{A}s = \boldsymbol{\mu} \quad (73)$$

Le problème P-1 d'estimation du terme source peut alors être reformulé comme suit :

$$\text{Connaissant } \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m, \text{ trouver } s(\mathbf{x}) \in E \text{ tel que } \mathbf{A}s = \boldsymbol{\mu} \quad \text{P-2}$$

Notons que, dans cette formulation, les mesures sont en nombre fini et regroupées dans le vecteur $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ alors que l'inconnue du problème $s(\mathbf{x})$ est une fonction continue. Dans son ouvrage de référence, Menke (1984) nomme ce type de problèmes (données discrètes, inconnues continues) « problèmes inverses continus » (ou « continuous inverse problems », en anglais). Pour passer d'un problème continu à un problème discret (ou « discrete inverse problem », en anglais), on peut remplacer les intégrales par des sommes de Riemann (on peut aussi utiliser d'autres formules de quadrature). Pour cela, on découpe le domaine spatio-temporel $\Omega = [0, T] \times D$ en un ensemble de cellules Ω_j , de centres \mathbf{x}_j (nœuds) et de volumes

élémentaires $d\mathbf{x}_j$, où $j \in [1, n]$. Ensuite, on remplace les intégrales par des sommes pondérées des valeurs de $a_i s$, aux points \mathbf{x}_j . On obtient alors le système d'équation suivant :

$$\sum_{j=1}^n a_i(\mathbf{x}_j) s(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j = \mu_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (74)$$

En posant $A_{ij} = a_i(\mathbf{x}_j)$ et $s_j = s(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j$ pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, la relation source - mesures (38) devient un système linéaire à m équations :

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu} \quad (75)$$

où $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$ et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Le problème inverse devient :

$$\text{Connaissant } \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m, \text{ trouver } \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \mathbf{A}\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu} \quad \text{P-3}$$

4.1.2 La matrice d'influence

La matrice \mathbf{A} est appelée la matrice d'influence ou la matrice de sensibilité. Elle peut être exprimée sous la forme $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{\cdot,1} \quad \mathbf{A}_{\cdot,2} \quad \dots \quad \mathbf{A}_{\cdot,n}] = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n]$ où chaque vecteur colonne $\mathbf{A}_{\cdot,j} = \mathbf{a}_j$, de dimension m , contient les mesures qui seraient engendrées par un rejet unitaire au point de coordonnées \mathbf{x}_j , $\mathbf{a}_j = [a_1(\mathbf{x}_j), \dots, a_m(\mathbf{x}_j)]^T$. Les composantes $a_i(\mathbf{x}_j)$ peuvent être obtenues soit par discrétisation des solutions des modèles adjoints continus, soit comme solutions numériques des modèles adjoints discrétisés (Hourdin et al, 2006).

On note $R(\mathbf{A})$ le sous espace de \mathbb{R}^m engendré par les n vecteurs colonnes \mathbf{a}_j , $R(\mathbf{A}^T)$ le sous espace de \mathbb{R}^n engendré par les m vecteurs lignes $\mathbf{A}_{i,\cdot}$, $N(\mathbf{A})$ son noyau (sous espace de \mathbb{R}^n des vecteurs annulant \mathbf{A}) et $N(\mathbf{A}^T)$ son noyau à gauche (sous espace de \mathbb{R}^m des vecteurs annulant \mathbf{A}^T).

$$\begin{aligned} R(\mathbf{A}) &= \{ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}\mathbf{s} \text{ pour } \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \} \\ R(\mathbf{A}^T) &= \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{s} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda} \text{ pour } \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m \} \\ N(\mathbf{A}) &= \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{0} \} \\ N(\mathbf{A}^T) &= \{ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \text{ ou } \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{A} = \mathbf{0} \} \end{aligned} \quad (76)$$

Enfin, on note p le rang de \mathbf{A} , $p = \dim\{R(\mathbf{A})\}$. On montre facilement que tous les vecteurs de $N(\mathbf{A})$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de $R(\mathbf{A}^T)$ et que tous les vecteurs de $N(\mathbf{A}^T)$ sont orthogonaux à tous les vecteurs de $R(\mathbf{A})$. Ceci signifie que $R(\mathbf{A}^T)$ est le complément orthogonal de $N(\mathbf{A})$ et que $R(\mathbf{A})$ est le complément orthogonal de $N(\mathbf{A}^T)$, soit $R(\mathbf{A}^T) = N(\mathbf{A})^\perp$ et $R(\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}^T)^\perp$.

4.1.3 Analyse du problème inverse discret

Le problème P-3 est bien posé si :

1. $\boldsymbol{\mu} \in R(\mathbf{A})$, ainsi le système (75) possède une solution (on dit alors que le système est compatible ou consistant).
2. $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ (le noyau de \mathbf{A} est réduit au vecteur nul de \mathbb{R}^n), ainsi la solution est unique.
3. \mathbf{A} est bien conditionnée, ainsi le problème est numériquement stable (on parle aussi de « robustesse au bruit » puisqu'une solution stable n'amplifie pas exagérément un éventuel bruit de mesure).

On remarque que la troisième condition ne porte plus, comme au paragraphe 3.3, sur la continuité des données, mais sur le conditionnement de la matrice \mathbf{A} . En effet, en dimensions finies, la solution dépend toujours continûment des données. Cependant, lorsque le nombre de conditionnement (condition number, en anglais) de la matrice \mathbf{A} (rapport entre sa plus grande et sa plus petite valeur propre) est très grand, les erreurs sur $\boldsymbol{\mu}$ se répercutent de manière catastrophique sur la solution. On dira que le système est mal conditionné. Dans ce cas, il est nécessaire d'employer des méthodes de régularisation. Ces dernières sont abondamment décrites dans les ouvrages traitant d'algèbre linéaire numérique, voir par exemple (Hansen, 2005). Nous avons déjà précisé que si le réseau de capteurs a été bien conçu, les fonctions $a_i(\mathbf{x})$ sont suffisamment différentes les unes des autres et la matrice \mathbf{A} est bien conditionnée. Ainsi nous focaliserons-nous sur les deux premières conditions. Si on considère, en plus, que \mathbf{A} est de rang plein (c'est-à-dire que ses lignes et/ou colonnes sont linéairement indépendantes), nous pouvons distinguer 3 cas suivant les valeurs de n , m et p .

- $m = n = p$. Le système est bien déterminé, la matrice \mathbf{A} est carrée et admet un inverse \mathbf{A}^{-1} . Les conditions d'existence et d'unicité sont vérifiées, l'équation (75) possède une et une seule solution $\mathbf{s} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\mu}$.
- $m > n = p$. Le système est surdéterminé, la condition d'existence de la solution n'est pas nécessairement vérifiée.
- $n > m = p$. Le système est sous déterminé, la condition d'unicité de la solution n'est pas vérifiée.

4.2 Cas du système surdéterminé

Dans le cas où $m > n = p$, le problème P-3 n'a pas de solution et le vecteur des résidus

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s} \quad (77)$$

n'est pas nul. On peut néanmoins trouver une « pseudo-solution » au sens des moindres carrés.

4.2.1 Solution au sens des moindres carrés ordinaires

Une pseudo solution du problème P-3 est le vecteur \mathbf{s}_{mco} (l'indice « mco » pour « moindres carrés ordinaires ») qui minimise la fonctionnelle $J(\mathbf{s}) = \|\mathbf{r}\|^2 = (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s})^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s})$ (où $\|\cdot\|$ désigne la norme Euclidienne ordinaire). Le problème P-3 est donc remplacé par le problème d'optimisation suivant

$$\text{Connaissant } \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m, \text{ trouver } \mathbf{s}_{mco} = \arg \min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n} \{J(\mathbf{s})\} \quad \text{P-4}$$

Une minimisation de $J(\mathbf{s})$ s'obtient en écrivant que la fonctionnelle possède un point critique en \mathbf{s}_{mco} si $\nabla J(\mathbf{s}_{mco}) = 0$, c'est-à-dire si

$$-2\mathbf{A}^T (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}_{mco}) = 0 \quad (78)$$

\mathbf{s}_{mco} est solution du système linéaire (78) formé des équations dites « normales », on dit que c'est une « pseudo-solution » du problème P-3. Elle s'exprime sous la forme :

$$\mathbf{s}_{mco} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} \quad (79)$$

Cette pseudo-solution existe puisque la matrice symétrique $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, appelée « matrice de Gram des colonnes de \mathbf{A} », est définie positive (les colonnes de \mathbf{A} étant linéairement indépendantes). Puisque $\nabla^2 J = 2(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, ce résultat confirme également que \mathbf{s}_{mco} est bien un minimum.

Pseudo-inverse et inverse généralisé

La matrice $n \times m$ $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ qui apparaît dans l'expression (79) est « l'inverse généralisé à gauche » de \mathbf{A} , noté \mathbf{A}^g . En effet, elle vérifie les relations suivantes :

$$\mathbf{A}^g \mathbf{A} = \mathbf{I}_n \text{ et donc } \mathbf{A} \mathbf{A}^g \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad (80)$$

La matrice $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ est aussi le pseudo inverse de \mathbf{A} , noté \mathbf{A}^+ . En effet, on peut facilement montrer qu'elle vérifie les quatre propriétés de Penrose (1955) qui définissent ce type d'inverse :

1. $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$.
3. $(\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$.
4. $(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$.

On remarque que la première propriété correspond à la relation (80) qui définit un inverse généralisé et on note qu'un pseudo inverse est aussi désigné par le terme «(1,2,3,4)-generalized inverse» (Ben Israel et Greville, 2003) en référence aux 4 propriétés de Penrose.

Vecteurs des mesures et des résidus

Les équations (78), dites « normales », expriment l'idée que la « meilleure » estimation du vecteur des mesures $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A} \mathbf{s}_{mco}$ est obtenue lorsque le vecteur des résidus $(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A} \mathbf{s}_{mco})$ est dans le noyau de \mathbf{A}^T . Dans ce cas,

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} \quad (81)$$

La matrice carrée $m \times m$, $\mathbf{N} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$, qui apparaît dans cette expression, est une matrice de projection orthogonale :

- \mathbf{N} est symétrique : $\mathbf{N}^T = \mathbf{N}$,
- \mathbf{N} est idempotente : $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N}$,
- $\text{tr}(\mathbf{N}) = \text{rang}(\mathbf{A}) = n$,
- $\det(\mathbf{N}) = 0$.

\mathbf{N} projette les vecteurs de \mathbb{R}^m sur le sous espace $R(\mathbf{A})$. Les anglo-saxons la nomment « the hat matrix » (puisqu'elle ajoute un chapeau sur le vecteur $\boldsymbol{\mu}$), Menke (1984) l'interprète comme

étant une « matrice de résolution des données ». Le vecteur des résidus donné par l'équation (77) peut être exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}_{mco} \\ &= \boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{N})\boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (82)$$

La matrice $(\mathbf{I}_m - \mathbf{N})$ est également une matrice de projection orthogonale : elle projette les vecteurs de \mathbb{R}^m sur $N(\mathbf{A}^T)$. Ainsi, chaque vecteur de mesure se décompose en deux termes orthogonaux :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{A}\mathbf{s}_{mco} + \mathbf{r} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}^+\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^+)\boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (83)$$

4.2.2 Solution au sens des moindres carrés généralisés

Pour définir la fonctionnelle $J(\mathbf{s})$, il est également possible d'utiliser, à la place de la norme ordinaire, une norme du type $\|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{W}_m} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{W}_m}^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\xi}}$ où \mathbf{W}_m est une matrice symétrique d'ordre m , définie positive. Dans ce cas, minimiser $J(\mathbf{s}) = \|\mathbf{r}\|_{\mathbf{W}_m}^2$ revient à trouver \mathbf{s}_{mcg} (indice « mcg » pour « moindre carrés généralisés ») tel que

$$-2\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}_{mcg}) = 0 \quad (84)$$

Si la matrice $(\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})$ est non singulière, on obtient :

$$\mathbf{s}_{mcg} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} \quad (85)$$

Si $\mathbf{W}_m = \mathbf{I}_m$, on retrouve bien la solution \mathbf{s}_{mco} .

Pseudo-inverse pondéré

La matrice $n \times m$, $\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m$, qui apparaît dans l'expression (85), est le pseudo inverse de \mathbf{A} , pondéré par la matrice \mathbf{W}_m . Il vérifie les relations suivantes :

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+$.
3. $(\mathbf{W}_m \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+)^T = \mathbf{W}_m \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+$.
4. $(\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ \mathbf{A}$.

Puisque $\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+$ ne vérifie que trois des quatre conditions de Penrose (conditions, 1, 2 et 4), c'est un "(1,2,4)-generalized inverse" de \mathbf{A} (Ben Israel et Greville, 2003).

Vecteur des mesures et des résidus

L'estimation du vecteur des mesures est :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A}\mathbf{s}_{mcg} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} \quad (86)$$

La matrice carrée $m \times m$, $\mathbf{N} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m$, qui apparait dans cette expression est une matrice de projection idempotente mais pas symétrique. On dit que c'est une matrice de projection oblique au sens de la géométrie ordinaire (Lewis et al., 2006) ou \mathbf{W}_m -orthogonale.

Le vecteur des résidus peut être exprimé sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}_{mcg} \\ &= \boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ \boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{N})\boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (87)$$

La matrice $(\mathbf{I}_m - \mathbf{N})$ est également une matrice de projection oblique. Ainsi, chaque vecteur de mesure se décompose sous la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{A}\mathbf{s}_{mcg} + \mathbf{r} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+ \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_m}^+) \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (88)$$

4.3 Cas du système sous déterminé

Lorsque $n > m = p$, le problème P-3 possède une infinité de solutions. En effet, le noyau de \mathbf{A} (complément orthogonal de $R(\mathbf{A}^T)$) ne se réduit pas au vecteur nul, $N(\mathbf{A}) \neq \{0\}$: il contient toutes les sources, \mathbf{s}_\perp , « non vues » par les mesures. Toute solution au problème P-3, peut donc être décomposée sous la forme :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_{//} + \mathbf{s}_\perp, \text{ où } \mathbf{s}_{//} \in R(\mathbf{A}^T) \text{ et } \mathbf{s}_\perp \in N(\mathbf{A}) \quad (89)$$

- $\mathbf{s}_{//}$ est la projection de \mathbf{s} dans le sous espace $R(\mathbf{A}^T)$. Par définition, $\mathbf{s}_{//}$ est une combinaison linéaire des vecteurs lignes de \mathbf{A} .
- $\mathbf{s}_\perp = \mathbf{s} - \mathbf{s}_{//}$ est la projection de \mathbf{s} dans $N(\mathbf{A})$. Par définition, \mathbf{s}_\perp est orthogonale à tous les vecteurs lignes de \mathbf{A} .

Ainsi, pour chaque solution du problème, on a :

$$\mathbf{As} = \mathbf{A}(\mathbf{s}_{//} + \mathbf{s}_{\perp}) = \mathbf{As}_{//} = \boldsymbol{\mu} \quad (90)$$

Cette équation nous confirme que seule la composante $\mathbf{s}_{//}$ contribue aux mesures. On peut facilement montrer que cette composante est unique et commune à toutes les solutions du problème P-3. Pour cela, considérons deux solutions \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 que l'on décompose sous la forme (89). Soient $\mathbf{s}_{//1}$ et $\mathbf{s}_{//2}$ leur projection dans $R(\mathbf{A}^T)$. Puisque \mathbf{s}_1 et \mathbf{s}_2 sont solutions du problème, on a $\mathbf{As}_{//1} = \mathbf{As}_{//2} = \boldsymbol{\mu}$. Une simple soustraction donne $\mathbf{A}(\mathbf{s}_{//1} - \mathbf{s}_{//2}) = 0$, c'est à dire $(\mathbf{s}_{//1} - \mathbf{s}_{//2}) \in N(\mathbf{A})$. Mais, puisque $\mathbf{s}_{//1}$ et $\mathbf{s}_{//2} \in R(\mathbf{A}^T)$, on a aussi $(\mathbf{s}_{//1} - \mathbf{s}_{//2}) \in R(\mathbf{A}^T)$. Cette contradiction nous mène à la conclusion que $\mathbf{s}_{//}$ est unique et commune à toutes les solutions : c'est la seule solution du problème dans $R(\mathbf{A}^T)$.

4.3.1 Solution de norme minimale

$\mathbf{s}_{//}$ est aussi la solution du problème P-3 de norme minimale. En effet, chaque solution peut être décomposée sous la forme (89). Puisque $\mathbf{s}_{//}$ et \mathbf{s}_{\perp} appartiennent à des sous-espaces orthogonaux de \mathbb{R}^m , le théorème de Pythagore donne

$$\|\mathbf{s}\|^2 = \|\mathbf{s}_{//}\|^2 + \|\mathbf{s}_{\perp}\|^2 \quad (91)$$

ce qui prouve que $\|\mathbf{s}\| > \|\mathbf{s}_{//}\|$ sauf si $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{//}$. Le problème peut donc être remplacé par le problème d'optimisation sous contrainte suivant

Connaissant $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, trouver le vecteur $\mathbf{s}_{//}$ qui minimise $\|\mathbf{s}\|$ et tel que

$$\mathbf{As} = \boldsymbol{\mu} \quad \text{P-5}$$

Puisque $\mathbf{s}_{//}$ appartient au sous espace engendré par les lignes de \mathbf{A} , on a $\mathbf{s}_{//} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}$ avec $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$. En remplaçant cette expression dans (90), on voit que $\boldsymbol{\lambda}$ est solution du système $\mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\mu}$, où $\mathbf{H} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. \mathbf{H} est une matrice carrée symétrique, d'ordre m , appelée « matrice de Gram » des lignes de \mathbf{A} . Puisque ces lignes correspondent aux $i = 1, \dots, m$ fonctions adjointes a_i , elles sont linéairement indépendantes. \mathbf{H} n'est donc pas singulière et son inverse existe. On a alors $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{H}^{-1}\boldsymbol{\mu}$, soit :

$$\mathbf{s}_{//} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (92)$$

Cette expression est la contrepartie discrète de la solution continue (43). Le carré de sa norme (longueur) est

$$\begin{aligned}\|s_{//}\|^2 &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{A}^T \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\mu}\end{aligned}\quad (93)$$

Pseudo-inverse et inverse généralisé

La matrice $m \times n$, $\mathbf{A}^g = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$, qui apparaît dans l'expression (92) vérifie $\mathbf{A} \mathbf{A}^g \mathbf{A} = \mathbf{A}$ c'est l'inverse généralisé à droite de \mathbf{A} puisque $\mathbf{A} \mathbf{A}^g = \mathbf{I}_m$ (rappelons que dans le cas surdéterminé, nous avons identifié l'inverse généralisé à gauche). Cette matrice est aussi un pseudo inverse de \mathbf{A} , noté \mathbf{A}^+ , car elle vérifie les quatre propriétés de Penrose.

Estimation du vecteur des mesures

L'estimation du vecteur des mesures est égale au vecteur observé (le vecteur des résidus est nul) :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A} s_{//} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \quad (94)$$

Ce résultat est logique puisque $\boldsymbol{\mu}$ est astreint à être dans $R(\mathbf{A})$.

Solution générale

En substituant le modèle $\mathbf{A} \mathbf{s} = \boldsymbol{\mu}$ dans l'équation (92), on obtient une expression qui relie la source estimée $s_{//}$ et la source réelle inconnue \mathbf{s}

$$\mathbf{s}_{//} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{R} \mathbf{s} \quad (95)$$

La matrice d'ordre n , $\mathbf{R} = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$ est une matrice de projection orthogonale :

- \mathbf{R} est symétrique,
- \mathbf{R} est idempotente,
- $\text{tr}(\mathbf{R}) = \text{rang}(\mathbf{A}) = m$,
- $\det(\mathbf{R}) = 0$.

\mathbf{R} projette les vecteurs de \mathbb{R}^n sur le sous espace $R(\mathbf{A}^T)$. Si on revient à la décomposition (89), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_\perp &= \mathbf{s} - \mathbf{s}_{//} \\ &= \mathbf{s} - \mathbf{R}\mathbf{s} = (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{s} \end{aligned} \quad (96)$$

La matrice $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^+\mathbf{A})$ est également une matrice de projection orthogonale : elle projette les vecteurs de \mathbb{R}^n sur le sous espace $N(\mathbf{A})$. Ainsi toute solution au problème P-5 peut être exprimée sous la forme :

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}^+\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\boldsymbol{\zeta} \quad (97)$$

où $\boldsymbol{\zeta}$ est un vecteur arbitraire de \mathbb{R}^n .

Matrice de résolution

$\mathbf{R} = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$ est aussi la « matrice de résolution du modèle ». Cette notion remonte aux travaux de Backus & Gilbert (1967) et de Menke (1984). L'équation (95) montre que si \mathbf{R} était égale à la matrice identité de dimension n , alors la solution $\mathbf{s}_{//}$ correspondrait exactement à la solution réelle \mathbf{s} . Mais, puisque le rang de \mathbf{R} est égal à m , elle ne peut pas être égale à \mathbf{I}_n . Cependant, \mathbf{R} sera considérée comme étant une « bonne matrice de résolution », si elle « s'apparente » à la matrice identité. Pour comprendre cela, on peut analyser cette matrice en introduisant les notions de « Resolution Kernels » et de « Point Spread Functions ».

D'une part, les lignes de la matrice \mathbf{R} sont appelées les « Resolution kernels ». Ces lignes peuvent être vues comme un ensemble de filtres qui agit sur la solution réelle pour donner une estimation en chaque point du domaine. En effet, chaque composante du vecteur $\mathbf{s}_{//}$, notée $s_{//j}$, peut s'écrire sous la forme :

$$s_{//j} = \mathbf{R}_{j,\bullet} \cdot \mathbf{s} \quad (98)$$

où $\mathbf{R}_{j,\bullet}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ ligne de \mathbf{R} . De façon plus graphique, on a :

$$s_{//j} = \left[\frac{j^{\text{ème}} \text{ ligne de } \mathbf{R}}{\quad} \right] \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad (99)$$

On voit que l'estimation $s_{//j}$ se décompose en une somme pondérée des composantes (s_1, s_2, \dots, s_n) de la source réelle et que les poids sont les éléments de la $j^{\text{ème}}$ ligne de \mathbf{R} . Aussi, pour que \mathbf{R} « s'apparente » à la matrice identité (et que $s_{//j}$ dépende principalement de s_j) il faut :

- a. que chaque ligne de \mathbf{R} atteigne son maximum au niveau de la diagonale,
- b. que ses termes non diagonaux soient faibles ou nuls.

D'autre part, les colonnes de la matrice \mathbf{R} sont appelées les « Point Spread Functions ». Ces fonctions nous renseignent sur la façon dont la solution se comporte si la source réelle est ponctuelle. En effet, on peut également écrire l'équation (95) sous la forme

$$\mathbf{s}_{//} = s_1 \mathbf{R}_{\bullet,1} + s_2 \mathbf{R}_{\bullet,2} + \dots + s_n \mathbf{R}_{\bullet,n} \quad (100)$$

où $\mathbf{R}_{\bullet,j}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ colonne de \mathbf{R} . Ainsi, lorsque la source réelle est ponctuelle et localisée au point \mathbf{x}_s , $\mathbf{s} = q_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ avec $s \in [1, n]$, on a :

$$\mathbf{s}_{//} = q_s \mathbf{R}_{\bullet,s} \quad (101)$$

On remarque que, contrairement à celles de \mathbf{s} , les composantes $s_{//j} = s_{//}(\mathbf{x}_j)$ du vecteur $\mathbf{s}_{//}$ ne sont pas nulles pour tous $\mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}_s$ ($\mathbf{s}_{//}$ est une source diffuse). En conséquence, pour que \mathbf{R} « s'apparente » à la matrice identité, il faut que la composante $s_{//}(\mathbf{x}_s)$ se distingue des autres. Il faut, par exemple, que les termes qui se trouvent sur la diagonale de \mathbf{R} soient dominants. Or, avec la solution de norme minimale (92), les termes dominants sont ceux qui correspondent aux positions des points de mesure. La pondération permet de corriger ce défaut.

4.3.2 Solution de norme minimale pondérée

Soit la matrice \mathbf{W}_n d'ordre n , symétrique, définie positive. On définit la norme pondérée

$\|\zeta\|_{\mathbf{W}_n} = (\zeta, \zeta)_{\mathbf{W}_n}^{1/2} = \sqrt{\zeta^T \mathbf{W}_n \zeta} \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n$ et on remplace le problème P-5 par le problème suivant :

Connaissant $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, trouver le vecteur $\mathbf{s}_{//\mathbf{W}_n}$ qui minimise $\|\mathbf{s}\|_{\mathbf{W}_n}$ et tel que

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu}$$

P-(6)

On effectue le changement de variable suivant $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\mathbf{W}_n^{-1/2}$ et $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{W}_n^{1/2}\mathbf{s}$. On vérifie aisément

que $\|\mathbf{s}\|_{\mathbf{W}_n} = \|\tilde{\mathbf{s}}\|$ et que $\mathbf{A}\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\mu}$. Ainsi, résoudre le problème P-6, revient à trouver la

solution qui minimise $\|\tilde{\mathbf{s}}\|$ et qui vérifie $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{s}} = \boldsymbol{\mu}$. Par analogie avec (92), cette solution est

$$\tilde{\mathbf{s}}_{//} = \tilde{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}}^T)^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (102)$$

En revenant aux variables initiales, on obtient :

$$\mathbf{s}_{//\mathbf{W}_n} = \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{H}_{\mathbf{W}_n}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (103)$$

où $\mathbf{H}_{\mathbf{W}_n}^{-1}$ est la matrice de Gram des lignes de $\mathbf{A}\mathbf{W}_n^{-1/2}$. Cette expression est la contrepartie discrète de la solution continue (49). Sa longueur (carré de la norme pondérée) est

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_{//\mathbf{W}_n}\|_{\mathbf{W}_n}^2 &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_{\mathbf{W}_n}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{W}_n \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{H}_{\mathbf{W}_n}^{-1} \boldsymbol{\mu} \\ &= \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_{\mathbf{W}_n}^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (104)$$

Pseudo-inverse pondéré

La matrice $n \times m$, $\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+ = \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{H}_{\mathbf{W}_n}^{-1}$, qui apparait dans l'expression (103), est le pseudo inverse de \mathbf{A} , pondéré par la matrice \mathbf{W}_n . Elle vérifie les relations suivantes :

1. $\mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+ \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+ = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+$.
3. $(\mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+$.
4. $(\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+ \mathbf{A}\mathbf{W}_n)^T = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+ \mathbf{A}\mathbf{W}_n$.

Puisque $\mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+$ ne vérifie que trois des quatre conditions de Penrose (conditions, 1,2 et 3), c'est un "(1,2,3)-generalized inverse" de \mathbf{A} .

Estimation du vecteur des mesures

L'estimation du vecteur des mesures est égale au vecteur observé :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{A}\mathbf{s}_{//\mathbf{W}_n} = \mathbf{A}\mathbf{W}_n^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}_n^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu} \quad (105)$$

Encore une fois, ce résultat est logique puisque l'on astreint $\boldsymbol{\mu}$ à être dans $R(\mathbf{A})$.

Solution générale

En substituant le modèle $\mathbf{A}\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu}$ dans l'équation (103), on obtient une expression qui relie la source estimée $\mathbf{s}_{//\mathbf{W}_n}$ et la source réelle inconnue \mathbf{s}

$$\mathbf{s}_{//\mathbf{W}_n} = \mathbf{W}_n^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}_n^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{s} \quad (106)$$

La matrice carrée d'ordre n , $\mathbf{R} = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+\mathbf{A}$, qui apparaît dans cette expression est une matrice de projection idempotente mais pas symétrique (mais elle vérifie la relation $(\mathbf{R}\mathbf{W}_n)^T = \mathbf{R}\mathbf{W}_n$).

C'est une matrice de projection oblique au sens de la géométrie ordinaire ou \mathbf{W}_n -orthogonale.

Il en est de même pour la matrice $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+\mathbf{A})$. En conséquence, toute solution au problème P - 6 peut être exprimée sous la forme :

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+\mathbf{A})\boldsymbol{\zeta} \quad (107)$$

où $\boldsymbol{\zeta}$ est un vecteur arbitraire de \mathbb{R}^n . $\mathbf{R} = \mathbf{A}_{\mathbf{W}_n}^+\mathbf{A}$ est aussi la matrice de résolution du modèle.

Ses termes diagonaux sont $R_{jj} = w_j^{-1}\mathbf{a}_j^T\mathbf{H}_{\mathbf{W}_n}^{-1}\mathbf{a}_j$: la renormalisation permet de les rendre « dominants ».

4.4 Inverses généralisés et matrices de résolution

Pour bien mettre en évidence l'analogie qui existe entre les cas « sur » et « sous-déterminés », nous rapportons ci-dessous les expressions des inverses généralisés \mathbf{A}^g et des matrices de résolution \mathbf{N} et \mathbf{R} pour les différents cas évoqués précédemment.

4.4.1 Cas surdéterminé

Moindres carrés

- $\mathbf{A}^g = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{N} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{R} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

Moindres carrés pondérés

- $\mathbf{A}^g = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m$
- $\mathbf{N} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m$
- $\mathbf{R} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$

4.4.2 Cas sous-déterminé

Norme minimale

- $\mathbf{A}^g = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1}$
- $\mathbf{N} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I}_m$
- $\mathbf{R} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}$

Norme minimale pondérée

- $\mathbf{A}^g = \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1}$
- $\mathbf{N} = \mathbf{A} \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I}_m$
- $\mathbf{R} = \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}$

4.5 La solution renormalisée

En situations opérationnelles, en cas de rejet atmosphérique, le nombre de mesures est généralement inférieur au nombre de nœuds du domaine et la matrice \mathbf{A} est de rang plein, soit $n > m = p$. C'est donc le cas « sous déterminé » qui nous intéresse. La solution de norme minimale (92) permet d'obtenir une estimation du vecteur source à partir des mesures, mais elle possède le même défaut que son équivalent continu (43) : elle privilégie les sources proches des capteurs (voir figure 8). La solution renormalisée permet de corriger ce défaut : c'est une solution de norme minimale pondérée pour laquelle la matrice de pondération est diagonale $\mathbf{W} = \text{Diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$.

4.5.1 Conditions de renormalisation

Pour construire la matrice de pondération, on choisit des poids w_j , $j \in [1, n]$, qui vérifient les conditions de « renormalisation » :

$$(i) w_j > 0 \quad (ii) \sum_{j=1}^n w_j = m \quad (iii) w_j^2 = \mathbf{a}_j^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_j \quad (108)$$

où $\mathbf{H}_w = \mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T$ est la matrice de Gram des lignes de $\mathbf{A} \mathbf{W}^{-1/2}$. Dans le cadre du problème continu, nous avons $\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = m$. Si on remplace cette intégrale par une somme de Riemann,

on obtient $\sum_{j=1}^n \varphi(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j = m$. On voit donc que les composantes de la matrice \mathbf{W} sont reliées à la fonction de visibilité par la relation : $w_j = \varphi(\mathbf{x}_j) d\mathbf{x}_j$. On remarque également que la condition (108-ii) peut être exprimée sous la forme $trace(\mathbf{W}) = m$ et que la condition (108-iii) peut aussi s'écrire sous les formes équivalentes suivantes :

$$w_j = \sqrt{\mathbf{a}_j^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_j} = \|\mathbf{a}_j\|_{\mathbf{H}_w^{-1}} \quad (109)$$

$$(w_j)^{-1} \mathbf{a}_j^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_j (w_j)^{-1} = 1$$

La solution renormalisée est la solution de norme pondérée $\|\mathbf{s}\|_w$ minimale, soit en appliquant (103) :

$$\mathbf{s}_{//w} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_w^+ \boldsymbol{\mu} \quad (110)$$

où \mathbf{A}_w^+ est le pseudo inverse de \mathbf{A} , pondéré par la matrice \mathbf{W} . La longueur de cette solution est

$$\|\mathbf{s}_{//w}\|_w^2 = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_w^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (111)$$

4.5.2 Matrice de résolution du modèle

En substituant le modèle $\mathbf{A}\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu}$ dans l'équation (110), on obtient :

$$\mathbf{s}_{//w} = \mathbf{A}_w^+ \mathbf{A} \mathbf{s} = \mathbf{R} \mathbf{s} \quad (112)$$

où \mathbf{R} est la matrice de résolution du modèle. Avec les conditions de renormalisation (108), les termes qui se trouvent sur la diagonale de \mathbf{R} sont tels que

$$R_{jj} = w_j^{-1} \mathbf{a}_j^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_j = w_j \quad (113)$$

La matrice de résolution du modèle a donc la forme suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_w^+ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_1^{-1} \mathbf{a}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_k & \cdots & w_1^{-1} \mathbf{a}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_k^{-1} \mathbf{a}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_1 & \cdots & w_k & \cdots & w_k^{-1} \mathbf{a}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_n \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^{-1} \mathbf{a}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_1 & \cdots & w_n^{-1} \mathbf{a}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_k & \cdots & w_n \end{bmatrix} \quad (114)$$

De plus, les éléments diagonaux, w_j , sont supérieurs ou égaux aux autres termes des colonne $\mathbf{R}_{\bullet,j}$. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition de renormalisation permettent d'écrire :

$$(w_k)^{-1} \mathbf{a}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_j \leq (w_k)^{-1} \underbrace{\sqrt{\mathbf{a}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_k}}_{w_k} \underbrace{\sqrt{\mathbf{a}_j^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}_j}}_{w_j} \leq w_j \quad \forall k, j = 1, \dots, n \quad (115)$$

Ainsi la matrice de résolution à la forme idéale schématisée ci-dessous :

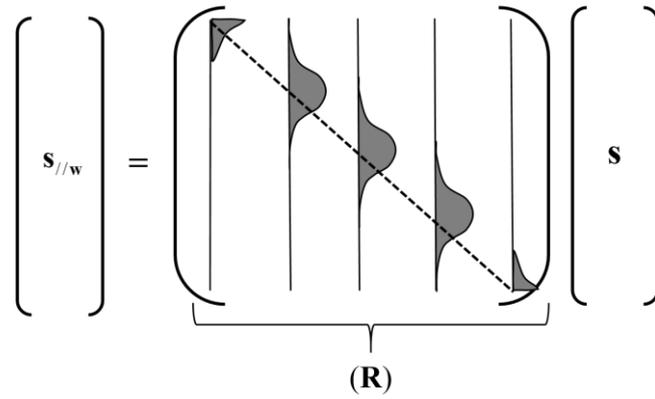


Fig. 12 : Forme de la matrice de résolution, d'après Menke (1984).

Ainsi, lorsque la source est ponctuelle et localisée au point \mathbf{x}_s , c'est-à-dire lorsque la source s'exprime sous la forme $\mathbf{s} = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$, on a d'après (101) :

$$\mathbf{s}_{//w} = q \begin{bmatrix} w_1^{-1} \mathbf{a}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s) \\ \vdots \\ w(\mathbf{x}_s) \\ \vdots \\ w_n^{-1} \mathbf{a}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{a}(\mathbf{x}_s) \end{bmatrix} \quad (116)$$

Grâce à la propriété (115), le vecteur $\mathbf{s}_{//w}$ a sa composante maximale localisée en \mathbf{x}_s . Cette propriété se nomme « zero localization error » (Grave de Peralta et al., 2009). Ainsi, sans avoir

besoin de faire d'hypothèse sur la nature de la source réelle, si cette dernière est ponctuelle sa position et son intensité sont données par les relations suivantes :

$$\mathbf{x}_s = \arg \max_{j=1\dots n} [s_{j/w}(\mathbf{x}_j)] \text{ et } q_s = \frac{s_{j/w}(\mathbf{x}_s)}{w(\mathbf{x}_s)} \quad (117)$$

Enfin, on remarque que, lorsque les poids vérifient les conditions (108), les termes diagonaux de \mathbf{RW}^{-1} sont tous égaux à 1 :

$$\mathbf{diag}(\mathbf{RW}^{-1}) = \mathbf{1}_n \quad (118)$$

où $\mathbf{1}_n$ est le vecteur de dimension n dont les composantes sont toutes égales à 1.

4.6 Algorithme pour le calcul des poids optimaux

Pour obtenir de façon fiable et efficace la matrice de pondération optimale \mathbf{W} , nous avons choisi d'associer le schéma itératif (51) aux résultats (113) et (118) que nous venons de démontrer. Notre objectif était de remplacer l'algorithme de 2007 (écrit en Fortran 77) afin de proposer une approche adaptée aux langages de programmation actuels (comme PYTHON, R, MATLAB et même le C++). Pour cela, nous avons choisi de calculer les composantes de \mathbf{W} à partir d'une série d'opérations matricielles et/ou vectorielles qui ne nécessitent pas l'utilisation de boucles « FOR » coûteuses en temps de calcul. Pour atteindre cet objectif, le schéma itératif (51) a été réécrit sous la forme :

$$w^{\alpha+1}(\mathbf{x}_j) = w_j^{\alpha+1} = w_j^\alpha \sqrt{(w_j^\alpha)^{-1} \mathbf{a}_j^T \mathbf{H}_{w^\alpha}^{-1} \mathbf{a}_j (w_j^\alpha)^{-1}} \text{ with } w_j^0 = m/n \quad (119)$$

où « α » désigne le numéro de l'itération. En remarquant que le terme sous la racine correspond aux termes diagonaux de la matrice symétrique, \mathbf{RW}^{-1} , nous avons proposé l'algorithme représenté par l'organigramme de la figure 13.

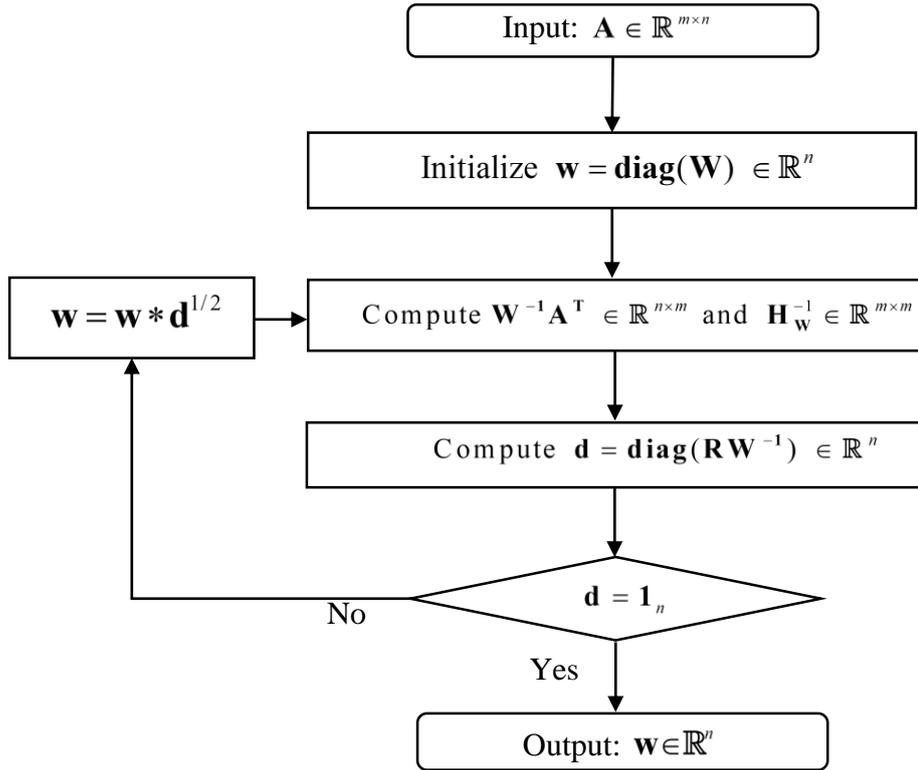


Fig. 13 : Organigramme de l'algorithme proposé.

L'algorithme est composé de deux parties distinctes. La première partie concerne le calcul de l'inverse de la matrice de Gram \mathbf{H}_w^{-1} . Elle implique :

- la transposition de la matrice \mathbf{A} (complexité d'ordre $O(m n)$),
- le calcul de la matrice $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T$ (complexité d'ordre $O(n m)$),
- le produit matriciel $\mathbf{H}_w = \mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T$ (complexité d'ordre $O(m^2 n)$),
- l'inversion de \mathbf{H}_w (complexité d'ordre $O(m^3)$).

La seconde partie concerne le calcul des termes diagonaux de la matrice $\mathbf{R}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{H}_w^{-1}\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{A}_w^+\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}$ et la vérification du critère de convergence. Puisque le $j^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de $\mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}$ est le produit scalaire de la $j^{\text{ème}}$ ligne de \mathbf{A}_w^+ et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}$ (ou de la $j^{\text{ème}}$ ligne de $\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T$), cette partie implique :

- le calcul de la matrice \mathbf{A}_w^+ (complexité d'ordre $O(m^2 n)$),
- le calcul de n produits scalaires (complexité d'ordre $O(n m)$),
- la vérification du critère de convergence (complexité d'ordre $O(n)$).

Puisque $n \gg m$, la complexité globale de l'algorithme est d'ordre $O(m^2n)$. Cette évaluation a été confirmée expérimentalement (régression linéaire entre m^2n et le temps de calcul pour des matrices **A** générées aléatoirement, voir figure-14).

En ce qui concerne le stockage des données, puisque nous ne calculons que les termes diagonaux de l'imposante matrice \mathbf{RW}^{-1} , les seules matrices à stocker sont de dimensions $m \times n$ et $n \times m$. En conséquence, la complexité de l'algorithme en terme de stockage est d'ordre $O(mn)$.

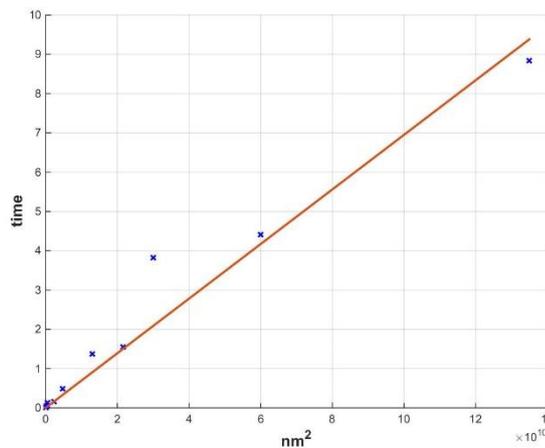


Fig. 14 : Régression linéaire entre m^2n et le temps de calcul pour $m=100$, $n=150000$ et $\varepsilon = 10^{-7}$

Nous avons proposé une version totalement vectorisée de cet algorithme écrit en code Matlab – version 8.4. Cette dernière (voir les annexes, paragraphe 10.2) comporte moins de 15 lignes ! La fonction Matlab créée a été appelée RENORM1D. Elle calcule les poids renormalisés et les stocke dans un vecteur de dimension n , noté **d**. Pour améliorer ses performances, nous avons utilisé les fonctions intégrées de Matlab, comme l'opérateur « `inv()` » (basé sur la décomposition *LU* de la librairie LAPACK) ou encore la fonction « `bsxfun` » qui effectue des opérations binaires élément par élément. On peut noter que, pour débiter les calculs, nous avons choisi comme valeurs initiales des poids m/n et non la valeur unité proposée par Issartel et al. (2007). Enfin, on considère que l'algorithme a convergé lorsque les

composantes du vecteur \mathbf{d} sont égales à 1 avec une tolérance égale à ε (où ε est un petit nombre positif donné), soit $\max |d_j - 1| \leq \varepsilon \quad \forall j = 1 \dots n$.

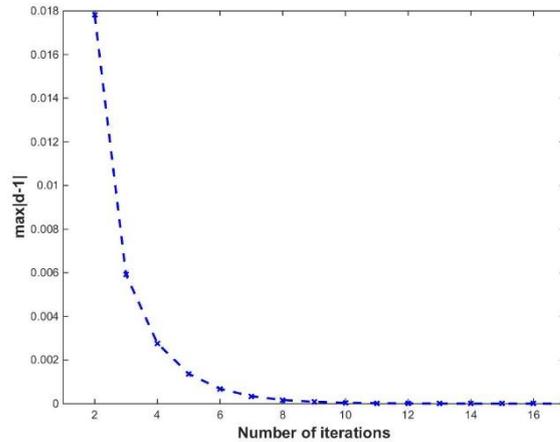


Fig. 15 : Convergence pour $m=100$, $n=150\,000$ et $\varepsilon = 10^{-7}$

Les tests montrent que l’algorithme converge systématiquement avec un nombre d’itérations qui dépend de ε (voir le tableau-1). A titre d’information, avec un ordinateur Intel® Core™ i7-4790 CPU@3,60 GHz 64 bits, 16 Go Ram, pour $m=100$, $n=1,5 \cdot 10^5$ et $\varepsilon = 10^{-7}$ le temps de calcul est de 19s, pour 15 itérations.

Précision ε	10^{-5}	10^{-7}	10^{-10}
Nombre d’itérations moyen	8	15	25

Tab. 1: Nombre d’itérations pour obtenir \mathbf{w} avec $m=100$ et $n=150\,000$

4.7 Comparaison avec d’autres méthodes d’inversion

Afin de replacer la méthode développée dans le contexte général de la résolution du problème d’estimation du terme source, nous avons réalisé une étude comparative. Pour cela, nous avons analysé plusieurs articles de synthèse tels que; Rao (2007) ; Liu, X., and Z. Zhai (2007) ; Zheng & Chen (2011) ; Yee (2012) ; Singh et al. (2015) ou encore Hutchinson et al. (2017). Ces articles montrent que les méthodes de résolution du problème inverse linéaire, $\mathbf{A}\mathbf{s} = \boldsymbol{\mu}$, consistent toutes à trouver une solution sous la forme $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\mu}$, où \mathbf{G} est une matrice $n \times m$. Elles se divisent en deux catégories principales :

1. la première regroupe les méthodes relevant de l’optimisation,

2. la seconde les méthodes stochastiques Bayésiennes.

4.7.1 Méthodes de type optimisation

Ces méthodes consistent à trouver une solution au problème en minimisant une fonction coût. D'après Grave de Peralta et Gonzalez-Andino (1999), on distingue deux approches. Dans la première (dite « classique »), la fonction coût traduit la proximité entre le modèle et les données et/ou la proximité avec une sélection a priori. Dans la seconde, la fonction coût mesure la proximité entre la matrice de résolution du modèle et la matrice de résolution idéale.

Première approche

La solution au problème est obtenue en définissant une fonction coût du type :

$$J_\lambda = (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s})^T \mathbf{W}_m (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}) + \lambda^2 (\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T \mathbf{W}_n (\mathbf{s} - \mathbf{s}_b) \quad (120)$$

et en cherchant

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \{J_\lambda\} \quad (121)$$

Dans l'expression (120), λ est un nombre réel positif, tandis que \mathbf{W}_m , \mathbf{W}_n (matrices symétriques, d'ordres m et n , définies positives) et \mathbf{s}_b (valeur a priori de la fonction source ou « ébauche », l'indice « b » pour « background ») sont trois paramètres qui représentent des éléments d'information introduits a priori dans le problème (c'est-à-dire avant d'avoir réalisé les mesures). Le premier terme traduit la « fidélité » aux mesures, le second traduit la fidélité à l'estimation a priori. Quel que soit le rang de la matrice \mathbf{A} , Grave de Peralta et Gonzalez-Andino (1999) expliquent qu'il existe une unique solution au problème (120) si et seulement si l'intersection des noyaux des matrices \mathbf{W}_n et $\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}$ est réduite au vecteur nul, c.à.d.

$N(\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}) \cap N(\mathbf{W}_n) = \{\mathbf{0}\}$. Cette solution est donnée par :

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_b + (\mathbf{A}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{W}_n)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W}_m (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}_b) \quad (122)$$

ou, en utilisant la formule Sherman-Morrison-Woodbury,

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s}_b + \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{A}^T + \lambda^2 \mathbf{W}_m^{-1})^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}_b) \quad (123)$$

En contexte accidentel, Winiarek et al. (2012) montrent que le choix $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$ est généralement pertinent.

- Lorsque l'on prend $\mathbf{W}_n = \mathbf{I}_n$ et $\mathbf{W}_m = \mathbf{I}_m$ on retrouve la solution de Tikhonov (Tikhonov and Arsenin, 1977), :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_\lambda &= (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda^2 \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{A}^T \boldsymbol{\mu} \\ &= \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T + \lambda^2 \mathbf{I}_m)^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (124)$$

Cette solution est utilisée lorsque la matrice \mathbf{A} n'est pas de rang plein (ou mal conditionnée) et, qu'en conséquence, les matrices $\mathbf{A} \mathbf{A}^T$ et $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ sont singulières. Le terme λ^2 est alors un paramètre dit de « régularisation » qui agit comme un paramètre de réglage ou de compromis : une faible valeur de λ^2 va privilégier une solution fidèle aux mesures (en minimisant $\|\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A} \mathbf{s}\|^2$), tandis qu'une valeur plus forte va produire une solution qui respecte davantage la condition sur la norme de la solution recherchée (en minimisant $\|\mathbf{s}\|^2$). Cependant, dans la théorie, rien n'est indiqué concernant le choix de λ^2 . On utilise alors des approches empiriques, comme celle des courbes en L (Hansen, 1992), pour fixer la valeur de ce paramètre. Enfin on remarque que, lorsqu'on fait tendre λ^2 vers 0, \mathbf{s}_λ converge vers la solution de norme minimum $\mathbf{s}_{//}$ donnée par l'équation (92).

- Quelle que soit \mathbf{W}_n , lorsqu'on fait tendre λ^2 vers 0, on retrouve la solution de norme minimale pondérée $\mathbf{s}_{//\mathbf{W}_n}$ donnée par l'expression (103). De même, lorsque les composantes de cette matrice vérifient les conditions de renormalisation, on retrouve la solution renormalisée $\mathbf{s}_{//\mathbf{W}}$ donnée par (110).

Seconde approche

Dans la seconde approche, la fonction coût mesure la proximité entre la matrice de résolution du modèle et la matrice de résolution idéale. En effet, au paragraphe 4.3, nous avons vu que plus la matrice de résolution d'un modèle est proche de la matrice identité, meilleure est la solution du problème. Ici, l'idée est toujours de trouver une estimation sous la forme $\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{G} \boldsymbol{\mu}$ mais avec une matrice de résolution $\mathbf{R} = \mathbf{G} \mathbf{A}$ optimale. Pour cela, en s'inspirant des travaux de Backus-Gilbert (1967) et de Menke (1984), on définit une « spread function » qui caractérise l'éloignement de la matrice \mathbf{R} par rapport à \mathbf{I} :

$$d(\mathbf{R}, \mathbf{I}) = \sum_i \sum_j f_{ij} \left([\mathbf{R}]_{ij} - [\mathbf{I}]_{ij} \right)^2 \quad (125)$$

où les f_{ij} sont des coefficients positifs formant une matrice de pondération notée \mathbf{F} . En posant $\mathbf{R} = \mathbf{GA}$, Grave de Peralta et al (1997) montrent que :

$$d(\mathbf{GA}, \mathbf{I}) = \sum_i \left(\mathbf{G}_{i,\bullet} \mathbf{S}_i \mathbf{G}_{i,\bullet}^T - 2f_{ii} \mathbf{G}_{i,\bullet} \mathbf{A}_{\bullet,i} + f_{ii} \right) \quad (126)$$

où $\mathbf{S}_i = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{F}}_{i,\bullet} \mathbf{A}^T$, avec $\tilde{\mathbf{F}}_{i,\bullet}$ la matrice diagonale dont les termes sont égaux à ceux de la $i^{\text{ème}}$ ligne de \mathbf{F} . On construit l'opérateur optimal en résolvant $\hat{\mathbf{G}} = \arg \min_{\mathbf{G}} \{d(\mathbf{GA}, \mathbf{I})\}$. Puisque la fonction d est une somme de termes qui ne dépendent que de $\mathbf{G}_{i,\bullet}$, Grave de Peralta et al (1997), montrent que la solution s'obtient, ligne par ligne, sous la forme :

$$\hat{\mathbf{G}}_{i,\bullet} = f_{ii} \mathbf{A}_{\bullet,i}^T \mathbf{S}_i^{-1} = f_{ii} \mathbf{A}_{\bullet,i}^T \left(\mathbf{A} \tilde{\mathbf{F}}_{i,\bullet} \mathbf{A}^T \right)^{-1} \quad (127)$$

- Lorsque les termes de la matrice de pondération sont constants et positifs, $f_{ij} = \alpha > 0$, on obtient $\hat{\mathbf{G}}_{i,\bullet} = \mathbf{A}_{\bullet,i}^T \left(\mathbf{A} \mathbf{A}^T \right)^{-1}$. On retrouve les lignes de l'opérateur inverse de la solution de norme minimum $\mathbf{s}_{//}$ donnée par l'équation (92).
- Lorsque $\tilde{\mathbf{F}}_{i,\bullet} = \mathbf{W}^{-1} \forall i$ (où \mathbf{W} est la matrice des poids renormalisés), on obtient $\hat{\mathbf{G}}_{i,\bullet} = w_i^{-1} \mathbf{A}_{\bullet,i}^T \left(\mathbf{A} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}^T \right)^{-1}$. On retrouve les lignes de l'opérateur inverse de la solution renormalisée $\mathbf{s}_{//\mathbf{W}}$ donnée par (110).

4.7.2 Méthodes de type Bayésien

On considère la relation source-mesures sous la forme générale :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{As} + \mathbf{e}^o \quad (128)$$

où $\mathbf{e}^o \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur « des erreurs d'observation » défini au paragraphe 3.3. Le principe de l'approche Bayésienne est de considérer toutes les données comme aléatoires et de formuler le problème en termes de densités de probabilité (pdf), voir par exemple Keats et al. (2007) ou Yee et al. (2008). Ici, ce que l'on cherche à estimer c'est la « densité de probabilité a posteriori » de la source qui a généré l'observation. Cette pdf est exprimée sous forme d'une densité de probabilité conditionnelle notée $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu})$. Cette notation montre bien qu'il s'agit d'une fonction de \mathbf{s} , qui est inconnue et qui dépend du vecteur observé $\boldsymbol{\mu}$. Pour obtenir $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu})$, on suppose

que l'on connaît (avant même d'avoir effectué les mesures) une densité de probabilité du vecteur \mathbf{s} , notée $p(\mathbf{s})$, dite « densité de probabilité a priori » (par opposition à la densité de probabilité a posteriori recherchée). On suppose aussi que l'on connaît la densité de probabilité des mesures lorsque la source est connue de façon déterministe. Cette densité de probabilité est elle aussi exprimée sous forme d'une densité de probabilité conditionnelle, $p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s})$, dite fonction de vraisemblance. La relation des probabilités conditionnelles de Bayes nous donne

$$p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu}) = \frac{p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s})p(\mathbf{s})}{p(\boldsymbol{\mu})} \quad (129)$$

où $p(\boldsymbol{\mu}) = \int p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s})p(\mathbf{s})d\mathbf{s}$, la vraisemblance marginale, ne représente ici qu'une constante de normalisation pour que $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu})$ soit effectivement une densité de probabilité. Ainsi, dans la littérature, on retrouve souvent la notation de proportionnalité $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu}) \propto p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s})p(\mathbf{s})$ qui signifie que la densité a posteriori est égale, à une constante près, à la fonction de vraisemblance multipliée par la densité a priori.

D'une part, (128) relie directement $p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s})$ à la distribution a priori des erreurs d'observation notée $p(\mathbf{e}^o)$. Si on suppose que ces erreurs sont non biaisées $E[\mathbf{e}^o] = 0$ (où $E[.]$ décrit l'espérance mathématique) et qu'elles suivent une loi normale $N(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, où $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de covariance des erreurs (dont le déterminant est noté $|\mathbf{Q}|$), alors

$$p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m |\mathbf{Q}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s})^T \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s})\right) \quad (130)$$

D'autre part, $p(\mathbf{s})$ est relié à la distribution, a priori, des erreurs d'ébauche qui représentent l'écart $\Delta\mathbf{s}$ entre le vecteur source inconnu et une estimation fixée a priori : $\Delta\mathbf{s} = (\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)$. Si on suppose que les erreurs d'ébauches sont non biaisées $E[\Delta\mathbf{s}] = 0$ et suivent une loi normale $N(\mathbf{0}, \mathbf{B})$, où $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice de covariance des erreurs d'ébauche (ou « background error covariance matrix »), alors

$$p(\mathbf{s}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\mathbf{B}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)\right) \quad (131)$$

A l'aide de ces deux expressions et de (129), il est possible d'exprimer $p(\boldsymbol{\mu})$ puis d'obtenir la probabilité conditionnelle recherchée $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu})$. Cependant, cette information peut être délicate

à manipuler et on préfère travailler avec un estimateur de \mathbf{s} . On choisit généralement l'estimateur a posteriori de probabilité maximum : il s'agit de la valeur de \mathbf{s} qui maximise $p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu})$:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} \{ p(\mathbf{s} | \boldsymbol{\mu}) \} \quad (132)$$

$p(\boldsymbol{\mu})$ étant constant, le problème peut être transformé en un problème d'optimisation

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \{ J_{bayes} \} \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} J_{bayes} &= -\ln(p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{s})) - \ln(p(\mathbf{s})) \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s})^T \mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}\mathbf{s}) + \frac{1}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{s} - \mathbf{s}_b) \end{aligned} \quad (133)$$

On voit donc que, dans le cas des statistiques Gaussiennes, en posant $\mathbf{W}_n = \mathbf{B}^{-1}$ et $\mathbf{W}_m = \mathbf{Q}^{-1}$, la formulation bayésienne est équivalente aux méthodes d'optimisation. En choisissant $\mathbf{s}_b = \mathbf{0}$, on a :

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{B}\mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q})^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (134)$$

On voit que cette estimation dépend des observations et du modèle, mais aussi des matrices de covariance a priori \mathbf{B} et \mathbf{Q} . Or, en situations opérationnelles, il est souvent difficile d'estimer ces matrices et de nouvelles hypothèses doivent être introduites pour les définir. Ces dernières conditionnent fortement la qualité des résultats qui en découlent.

4.8 Bilan de la section

Dans cette section, nous avons montré que lorsque l'on travaille numériquement avec une source discrète, la relation entre le vecteur des observations et le terme source s'exprime à l'aide d'une matrice de sensibilité, notée \mathbf{A} , de taille $m \times n$, où m est le nombre de mesures et n le nombre de nœuds du domaine. Des solutions au problème inverse peuvent alors être obtenues en utilisant des pseudo inverses de la matrice \mathbf{A} .

Dans le cas qui nous intéresse, où le nombre d'observations est inférieur au nombre de nœuds (système sous-déterminé, $n > m$), nous avons montré que la méthode de renormalisation permet d'obtenir une solution en calculant un pseudo inverse pondéré de la matrice de sensibilité. Le choix d'une matrice de pondération adaptée confère à la solution une propriété remarquable : la source estimée a sa composante maximale localisée au point d'émission. Cette

propriété se nomme « zero localization error ». Ainsi, sans avoir besoin de faire d'hypothèse sur la nature de la source réelle, si cette dernière est ponctuelle sa position et son intensité sont facilement retrouvées. En s'inspirant des travaux de Menke (1984), nous avons expliqué cette propriété en utilisant le concept de matrice de résolution.

Nous avons ensuite montré que la solution renormalisée pouvait être facilement calculée à l'aide d'un algorithme performant (en terme de vitesse et de stockage), adapté aux langages de programmation actuels. Enfin, nous avons replacé la méthode dans le contexte général de la résolution du problème d'estimation du terme source. Nous avons constaté que la méthode pouvait être class e dans les méthodes, non Bayésiennes, relevant de l'optimisation. L'information qu'elle utilise ne dépend que des données mesurées, du modèle et de l'architecture du réseau et non de matrices de covariance dont l'estimation conditionne fortement la qualité de l'analyse qui en découle.

5. RESOLUTION DU PROBLEME INVERSE DANS LE CADRE D'UNE APPROCHE PARAMETRIQUE

Dans les paragraphes précédents, l'objectif était de reconstruire un champ complet d'émission. Le champ inconnu était discrétisé et le nombre de variables inconnues (les composantes du vecteur source) était élevé et bien supérieur au nombre de mesures disponibles. La méthode retenue pour résoudre le problème inverse (recherche de la solution de norme minimale pondérée) était une méthode dite « non paramétrique ». Ce type de méthode, robuste et souple, présente l'avantage de ne pas s'appuyer sur des hypothèses a priori fortes concernant la nature de la source. Cependant, en situations accidentelles ou en cas d'attaques par dispersion aérienne d'agents chimiques ou biologiques, le rejet est très court et la source réelle a souvent une dimension très petite par rapport aux dimensions caractéristiques du domaine et du réseau d'observation. Il est alors raisonnable de supposer, a priori, que la source cherchée, \mathbf{s} , est ponctuelle, instantanée, d'intensité q_s et localisée, en espace et en temps, en un point \mathbf{x}_s . Nous avons déjà vu que de telles sources s'expriment sous la forme $\mathbf{s} = q_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$. Il s'agit alors d'identifier un nombre limité de paramètres : les γ composantes du vecteur \mathbf{x}_s et l'intensité q_s . Dans ce paragraphe, nous proposons une méthode qui permet d'estimer ces $\gamma + 1$ paramètres. Nous formulons également quelques recommandations afin d'améliorer le crédit et l'utilité opérationnelle de cette approche paramétrique. Cette partie du mémoire est partiellement basée sur nos articles [A8] et [A11].

5.1 Définition du problème

Le problème d'estimation paramétrique consiste à estimer les $\gamma + 1$ paramètres de la source à partir de m mesures. Si le nombre d'inconnues est inférieur ou égal au nombre de mesures, $\gamma + 1 < m$, le problème est surdéterminé et il est possible d'obtenir des estimations \hat{q}_s et $\hat{\mathbf{x}}_s$ de l'intensité et des coordonnées de la source à l'aide d'une approche de type moindres carrés. Considérons q et \mathbf{x} comme des variables et construisons le vecteur des résidus :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(q, \mathbf{x}) &= \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(q, \mathbf{x}) \\ &= \boldsymbol{\mu} - q\mathbf{a}(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{135}$$

Soit $\|\mathbf{r}(q, \mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m} = (\mathbf{r}, \mathbf{r})_{\mathbf{W}_m}^{1/2} = \sqrt{\mathbf{r}^T \mathbf{W}_m \mathbf{r}}$ la norme de ce vecteur pondérée par une matrice \mathbf{W}_m symétrique d'ordre m , définie positive. Cette norme est une fonction réelle positive des paramètres inconnus. A partir de cette dernière, on définit une fonction coût, ou objectif, $J(q, \mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(q, \mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2$ qui s'exprime, à l'aide de (135), sous la forme :

$$J(q, \mathbf{x}) = \|\boldsymbol{\mu} - q\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2 = (\boldsymbol{\mu} - q\mathbf{a}(\mathbf{x}))^T \mathbf{W}_m (\boldsymbol{\mu} - q\mathbf{a}(\mathbf{x})) \quad (136)$$

Le problème inverse devient alors le problème d'optimisation

$$\text{Connaissant } \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m, \text{ trouver } (\hat{q}_s, \hat{\mathbf{x}}_s) = \arg \min \{J(q, \mathbf{x})\} \quad \text{P-7}$$

La solution de ce problème dépend naturellement du choix de \mathbf{W}_m . Les options suivantes ont été étudiées dans la littérature :

- $\mathbf{W}_m = \mathbf{I}_m$ (Sharan et al., 2011, Singh & Rani 2014). Dans ce cas, on obtient une solution de type « moindres carrés ordinaires ».
- $\mathbf{W}_m = \mathbf{Q}^{-1}$, où \mathbf{Q} est la matrice de covariance des erreurs d'observation. Dans ce cas, on obtient une solution de type « moindres carrés généralisés ». En particulier, si on néglige les corrélations entre les erreurs cette matrice est diagonale et la solution est alors qualifiée de « moindres carrés pondérés » (Menke, 2015).
- $\mathbf{W}_m = \mathbf{H}_\varphi^{-1}$ (Issartel et al., 2011, Sharan et al., 2012). \mathbf{H}_φ^{-1} pouvant être vue comme étant une estimation a priori de la matrice \mathbf{Q} , la solution est qualifiée de « moindres carrés généralisés estimés » (ou de « moindres carrés réalisables »).

Afin d'uniformiser les approches et par souci de généralité, nous avons développé l'analyse pour le cas où \mathbf{W}_m est une matrice quelconque symétrique d'ordre m , définie positive.

5.2 Transformation et résolution du problème

5.2.1 Cas général

Le problème P-7 à résoudre est un problème d'optimisation combinatoire : il consiste à chercher la combinaison de paramètres (q, \mathbf{x}) qui minimise $J(q, \mathbf{x})$. Pour rechercher le minimum global d'une telle fonction, de dimension $\gamma + 1$, plusieurs algorithmes sont disponibles. On peut citer l'algorithme génétique (Allen et al., 2007) ou le recuit simulé (Thomson et al., 2007). Tous fonctionnent de façon itérative et convergent vers un minimum global, mais avec des temps de

convergence souvent longs (Hutchinson et al., 2017). Aussi avons-nous choisi de formaliser et de généraliser l'approche, initialement proposée par Issartel et al. (2011) et utilisée par Sharan et al. (2011, 2012) ou Singh & Rani (2014). Elle consiste à transformer le problème d'optimisation P-7 en un problème plus simple dans lequel le domaine de la fonction objectif n'est plus de dimension $\gamma + 1$ mais γ . Pour cela, on écrit que la fonction $J(q, \mathbf{x})$ possède un point critique en $(\hat{q}_s, \hat{\mathbf{x}}_s)$ si $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}}(\hat{q}_s, \hat{\mathbf{x}}_s) = 0$ et $\frac{\partial J}{\partial q}(\hat{q}_s, \hat{\mathbf{x}}_s) = 0$. En dérivant par rapport à la variable q on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial q} = -2\mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}_m (\boldsymbol{\mu} - q\mathbf{a}(\mathbf{x})) \quad (137)$$

et donc

$$\frac{\partial J}{\partial q} = 0 \Rightarrow q(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}}{\mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}_m \mathbf{a}(\mathbf{x})} = \frac{(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\mu})_{\mathbf{W}_m}}{\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2} \quad (138)$$

Cette équation fixe, pour chaque \mathbf{x} , une unique valeur admissible de q . Quand on substitue le terme de droite dans l'équation des résidus (135), on obtient

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x}) \text{ avec } \boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}}{\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (139)$$

et donc une nouvelle fonction objectif qui ne dépend plus que des composantes du vecteur \mathbf{x} :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2 = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} - \frac{[\mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}]^2}{\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2} \quad (140)$$

Ainsi, pour résoudre le problème P-7, il suffit de trouver $\hat{\mathbf{x}}_s = \arg \min \{J(\mathbf{x})\}$ et de prendre

$\hat{q}_s = \frac{\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}^2}$. Pour minimiser la fonction $J(\mathbf{x})$, on peut l'exprimer sous la forme

$$J(\mathbf{x}) = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}^2 - s^2(\mathbf{x}) \text{ où } s(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}}{\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}} = q(\mathbf{x}) \|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m} \quad (141)$$

On remarque que dans l'expression (141), le terme $\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}^2$ est constant et positif. Aussi, minimiser $J(\mathbf{x})$ revient à maximiser la fonction $s(\mathbf{x})$. Le problème P-7 peut donc être résolu en cherchant, dans le domaine Ω de dimension γ , $\hat{\mathbf{x}}_s = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{s(\mathbf{x})\}$ et en prenant

$$\hat{q}_s = \frac{s(\hat{\mathbf{x}}_s)}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}}.$$

5.2.2 Cas particulier de la renormalisation

Dans le cas où $\mathbf{W}_m = \mathbf{H}_\varphi^{-1}$, on a $\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{H}_\varphi^{-1}} = \varphi(\mathbf{x})$ et la fonction coût à minimiser devient

$$s(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{a}^T(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})} \mathbf{H}_\varphi^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{a}_\varphi^T(\mathbf{x}) \mathbf{H}_\varphi^{-1} \boldsymbol{\mu} = s_{//\varphi}(\mathbf{x}) \quad (142)$$

On retrouve l'expression (55) de la solution renormalisée, obtenue dans le cadre plus général d'une approche non paramétrique. Cette solution reste valable et conserve toutes ses propriétés, notamment celles qui permettent de retrouver les caractéristiques d'une source ponctuelle :

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{s_{//\varphi}(\mathbf{x})\} \quad \text{et} \quad \hat{q}_s = \frac{s_{//\varphi}(\hat{\mathbf{x}}_s)}{\varphi(\hat{\mathbf{x}}_s)} \quad (143)$$

5.3 Interprétations des résultats

D'un point de vue pratique, lorsque le rejet est stationnaire et le domaine bidimensionnel ($\gamma = 2$), on peut produire une carte des valeurs de $s(\mathbf{x})$, similaire à celle présentée figure 9, sur laquelle apparait explicitement la position $\hat{\mathbf{x}}_s$. Si le temps est pris en compte et le domaine tridimensionnel ($\gamma = 4$), il faut chercher le maximum sur un ensemble de cartes 3D. Cependant, il faut bien avoir conscience que les potentiels utilisateurs de la méthode pourront venir d'horizon très variés (scientifiques, équipes de secours, gestionnaires de crises, décideurs, etc...) et posséderont donc des cultures scientifiques et techniques diverses. Une utilisation efficace de la méthode doit donc s'appuyer sur la présentation de résultats facilement compréhensibles par le plus grand nombre. Cela passe par de nouvelles interprétations des résultats.

5.3.1 Longueur maximale du projeté orthogonal

Premièrement, pour tout \mathbf{x} le vecteur de mesure $\boldsymbol{\mu}$ peut se décomposer en une composante parallèle à $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ et en une composante perpendiculaire. Ces deux composantes sont respectivement $\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ données par (139). En effet, par définition,

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\mu})_{\mathbf{W}_m}}{(\mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{a}(\mathbf{x}))_{\mathbf{W}_m}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \text{est le projeté orthogonal de } \boldsymbol{\mu} \text{ sur } \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{ et il est facile de montrer}$$

que $(\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x}), \mathbf{r}(\mathbf{x}))_{\mathbf{W}_m} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$. Deuxièmement, on note que, puisque $\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ sont orthogonaux, le théorème de Pythagore s'applique et on a :

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}^2 = \|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2 + \|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}^2 \quad (144)$$

En remarquant que $\|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m} = q(\mathbf{x})\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m} = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{x})^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}}{\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}} = s(\mathbf{x})$, on retrouve l'équation (141) :

$$\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}^2 = s^2(\mathbf{x}) + J(\mathbf{x}) \quad (145)$$

On conclut donc que trouver la position \mathbf{x} pour laquelle $s(\mathbf{x})$ est maximale (ou, de façon équivalente, pour laquelle $J(\mathbf{x})$ est minimum) revient à chercher la position pour laquelle la longueur du projeté orthogonal de $\boldsymbol{\mu}$ sur $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ est la plus grande, c'est-à-dire la position pour laquelle $\boldsymbol{\mu}$ est le plus proche, d'un point de vue géométrique, de $\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}$.

5.3.2 Angle minimal entre vecteurs

Le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\mathbf{W}_m}$ permet de définir les angles que les vecteurs de \mathbb{R}^m forment les uns avec les autres. On a notamment :

$$\cos \theta(\mathbf{x}) = \left(\frac{\boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}}, \frac{\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})}{\|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}} \right)_{\mathbf{W}_m} = \frac{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x}))_{\mathbf{W}_m}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m} \|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}} \quad (146)$$

On rappelle que $\|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m} = s(\mathbf{x})$ et on vérifie aisément que $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x}))_{\mathbf{W}_m} = s^2(\mathbf{x})$. On a donc :

$$\cos \theta(\mathbf{x}) = \frac{\|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}\|_{\mathbf{W}_m}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}} = \frac{s(\mathbf{x})}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}} \quad (147)$$

Les valeurs de $\cos \theta(\mathbf{x})$ varient entre 0 et 1 et indiquent, pour chaque \mathbf{x} , le niveau de colinéarité entre $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}$. Intuitivement, cette colinéarité nous renseigne sur le niveau de similarité des deux vecteurs : lorsque $\cos \theta = 1$, c.à.d. $\theta = 0$, les deux vecteurs ont la même direction et sont donc similaires, lorsque $\cos \theta = 0$, c.à.d. $\theta = 90^\circ$, ils sont orthogonaux ce qui indique une absence de similarité. Ainsi, au lieu d'utiliser $J(\mathbf{x})$ ou $s(\mathbf{x})$ comme fonctions coûts à minimiser ou maximiser, nous avons aussi la possibilité d'utiliser la fonction $\cos \theta(\mathbf{x})$ (ou la fonction $\cos^2 \theta(\mathbf{x})$ pour faire l'analogie avec le « coefficient de détermination », R^2 , couramment utilisé en régression linéaire). Il est également possible d'utiliser directement la fonction $\theta(\mathbf{x})$ dont les valeurs présentent l'avantage d'être exprimées en unités d'angle :

$$\theta(\mathbf{x}) = \cos^{-1} \left(\frac{\|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}\|_{\mathbf{W}_m}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}} \right) \quad (148)$$

Le changement de variable $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\mathbf{W}_m^{-1/2} \boldsymbol{\mu}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}}$ et $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\text{mod}} = \frac{\mathbf{W}_m^{-1/2} \boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}}{\|\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}\|_{\mathbf{W}_m}} = \frac{\mathbf{W}_m^{-1/2} \mathbf{a}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{a}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}} = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ permet de récrire la relation (146) en manipulant des vecteurs unitaires pour le produit scalaire ordinaire :

$$\cos \theta(\mathbf{x}) = (\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \quad (149)$$

Ainsi, chercher la position pour laquelle $\cos \theta(\mathbf{x})$ est maximum, revient à chercher, à l'intérieur de l'hypersphère unité \mathbb{S}^{m-1} , la position $\hat{\mathbf{x}}_s$ pour laquelle les deux vecteurs $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ et $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ forment l'angle $\theta(\mathbf{x})$ le plus faible.

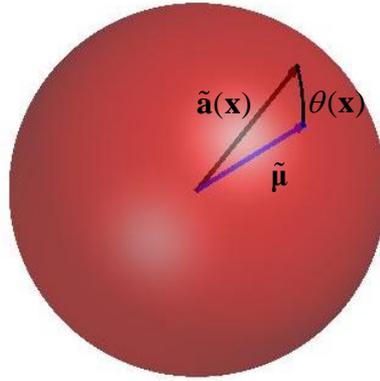


Fig. 16 : Représentation géométrique de $\theta(\mathbf{x})$ dans le cas où $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ et $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$

L'intensité estimée peut également être exprimée en fonction de cet angle :

$$\hat{q}_s = \frac{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}} \cos \theta(\hat{\mathbf{x}}_s) \quad (150)$$

5.3.3 Part de la norme expliquée par le modèle

Les résultats peuvent encore être interprétés en terme de « part de la norme expliquée par le modèle ». Cette part, notée $R(\mathbf{x})$, est défini comme suit :

$$R(\mathbf{x}) = 1 - \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{\mathbf{W}_m}}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}} = 1 - \sin \theta(\mathbf{x}) \quad (151)$$

Cette variable, basée sur le rapport « norme des résidus / norme du vecteur mesure » et qui varie entre 0 et 1, mesure, en chaque point du domaine, la capacité du modèle $\boldsymbol{\mu} = q(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})$ à

expliquer la mesure. Une valeur de 1 ne sera possible que si les résidus sont nuls ($\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|_{w_m} = 0$), c'est-à-dire si le modèle en ce point-là explique intégralement la mesure. Une valeur proche de 0 indique un faible pouvoir explicatif du modèle et donc que la source ponctuelle ne peut pas se trouver en ce point.

Les fonctions coûts $\theta(\mathbf{x})$ et de $R(\mathbf{x})$ prennent des valeurs facilement interprétables, contrairement à $J(\mathbf{x})$ ou $s(\mathbf{x})$. Aussi suggérons-nous de les utiliser de façon préférentielle pour rechercher, sur les cartes de résultats, la position des sources d'émissions :

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{R(\mathbf{x})\} \text{ ou } \arg \min_{\mathbf{x} \in \Omega} \{\theta(\mathbf{x})\} \quad (152)$$

De plus, l'approche proposée doit aider à prendre des décisions appropriées dans un scénario donné. Les utilisateurs ont besoin d'anticiper les conséquences de leurs choix : il est nécessaire de « communiquer de manière quantitative la véritable pertinence des résultats, c'est-à-dire estimer leur incertitude. Négliger cette étape reviendrait à limiter l'utilité opérationnelle des résultats » (Sapolin, 2011).

5.4 Estimation de l'incertitude

Afin d'améliorer son crédit et son utilité opérationnelle, la solution d'un problème inverse doit être accompagnée d'une estimation d'incertitude. Cela nécessite de développer une méthode d'évaluation d'incertitude associée à la méthode de renormalisation.

5.4.1 Région de bonne estimation

Une première méthode, assez simple voire simpliste, consiste à étudier la forme de la fonction coût au voisinage de son extremum. Ce qui suit est valable quelle que soit la fonction utilisée, $J(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$, $\theta(\mathbf{x})$ ou $R(\mathbf{x})$. Si l'extremum est très marqué (« sharp extremum »), la zone dans laquelle les valeurs de la fonction coût sont proches de l'extremum est très petite. La source est alors clairement identifiable, l'incertitude est faible. A l'inverse, si l'extremum est très peu marqué (« flat extremum »), la zone dans laquelle les valeurs de la fonction coût sont proches de l'extremum est très étendue. La source est difficilement identifiable, l'incertitude est très importante. De façon pratique, on peut tracer, sur les cartes de résultats, les courbes d'égales valeurs de la fonction coût au voisinage de la solution. Dans le cas d'un rejet stationnaire, ces zones sont des domaines ellipsoïdaux, centrés autour de $\hat{\mathbf{x}}_s$ et qui s'étirent dans la direction du vent moyen. Plus le volume de la zone est grand, plus l'incertitude est élevée : de nombreuse

valeurs de \mathbf{x} donnent des résultats proches de ceux calculés en $\hat{\mathbf{x}}_s$. Ces « régions de bonnes estimations » sont, d'après Menke (1984), les zones dans lesquelles les valeurs de $\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\mathbf{x})$ sont presque aussi « bonnes » que celle de $\boldsymbol{\mu}_{\text{mod}}(\hat{\mathbf{x}}_s)$. Elles sont définies comme étant les régions dans lesquelles les valeurs du vecteur \mathbf{x} vérifient :

$$J(\mathbf{x}) - J(\hat{\mathbf{x}}_s) \leq \Delta^2 \quad (153)$$

où la valeur de Δ^2 fixe le volume du domaine ellipsoïdal (de telles régions sont tracées, par exemple, figure 22). Si ce paramètre est associé à un critère de confiance, les régions définies par (153) deviennent des « régions de confiance ».

5.4.2 Régions de confiance

Un développement limité d'ordre 2, au voisinage de $\hat{\mathbf{x}}_s$, de la fonction $J(\mathbf{x})$ donne

$$J(\mathbf{x}) = J(\hat{\mathbf{x}}_s) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s)^T \left[\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_s} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s) \quad (154)$$

où $\left[\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_s}$ est la matrice Hessienne de la fonction coût au point $\hat{\mathbf{x}}_s$. La relation (153) peut

donc être aussi exprimée sous la forme

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s)^T \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_s} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s) \leq \Delta^2 \quad (155)$$

Draper & Smith (1998) rappellent que la matrice Hessienne approche l'inverse de la matrice de covariance :

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbf{x}^2} \right]_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_s} \quad (156)$$

où σ^2 est la variance, inconnue, du bruit affectant la mesure. On a donc :

$$\frac{J(\mathbf{x}) - J(\hat{\mathbf{x}}_s)}{\sigma^2} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s) \quad (157)$$

Draper & Smith (1998) montrent également que $(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_s)$ suit une loi du χ^2 à γ degrés de liberté tandis que $\frac{J(\hat{\mathbf{x}}_s)}{\sigma^2}$ suit une loi du χ^2 à $m - \gamma$ degrés de liberté. Puisque le quotient de deux variables distribuées chacune selon une loi du χ^2 et ajustées pour leur nombre de degrés de liberté suit une loi de loi de Fisher-Snedecor à γ et $m - \gamma$ degrés de liberté, on a :

$$\frac{(J(\mathbf{x}) - J(\hat{\mathbf{x}}_s)) / \gamma}{J(\hat{\mathbf{x}}_s) / (m - \gamma)} \sim \mathcal{F}(\gamma, m - \gamma) \quad (158)$$

Ainsi une région de confiance, de niveau de confiance $100(1 - \alpha)\%$, est la zone dans laquelle les valeurs du vecteur \mathbf{x} vérifient :

$$J(\mathbf{x}) - J(\hat{\mathbf{x}}_s) \leq \frac{J(\hat{\mathbf{x}}_s)}{(m - \gamma)} \gamma \mathcal{F}_{1-\alpha}(\gamma, m - \gamma) \quad (159)$$

où le seuil $\mathcal{F}_{1-\alpha}(\gamma, m - \gamma)$ correspond au quantile d'ordre $1 - \alpha$ de la loi de Fisher-Snedecor (la probabilité qu'un élément tiré au hasard suivant cette loi soit inférieur ou égal à $\mathcal{F}_{1-\alpha}$ est $1 - \alpha$).

La zone de confiance, centrée autour de $\hat{\mathbf{x}}_s$, peut être aisément tracée : c'est la région délimitée par l'ellipsoïde $J(\mathbf{x}) = J_u$ où

$$J_u = J(\hat{\mathbf{x}}_s) \left(1 + \frac{\gamma}{(m - \gamma)} \mathcal{F}_{1-\alpha}(\gamma, m - \gamma) \right) \quad (160)$$

A partir des équations (148), (151) et (160), les régions de confiance peuvent également être définies en terme d'angle ou de part de norme expliquée par le modèle. Ce sont les régions respectivement délimitées par les ellipsoïdes $\theta(\mathbf{x}) = \theta_u$ et $R(\mathbf{x}) = R_u$, avec :

$$\theta_u = \sin^{-1} \sqrt{\frac{J_u}{\|\boldsymbol{\mu}\|_{w_m}^2}} \quad \text{et} \quad R_u = 1 - \sin \theta_u \quad (161)$$

De telles régions sont tracées, par exemple, figure 23.

5.4.3 Intervalles de confiance

Il arrive fréquemment, dans la pratique, que l'on s'intéresse non pas à l'ensemble du vecteur $\hat{\mathbf{x}}_s$, mais à une de ses composantes \hat{x}_{sk} ($k = 1, \dots, \gamma$) en particulier. Il faut alors construire des intervalles de confiance individuels. Une première possibilité consiste à projeter les contours de la région de confiance « collective » (160) sur l'axe de coordonnées correspondant à la composante étudiée, perpendiculairement à ce dernier. Une autre approche consiste à calculer l'intervalle de confiance à partir d'une estimation de l'erreur standard de la composante \hat{x}_{sk} :

$$se(\hat{x}_{sk}) = \sqrt{\{\hat{\mathbf{C}}\}_{kk}} = \hat{\sigma} \sqrt{\left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2} \right]^{-1} \right\}_{kk} \Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_s}} \quad (162)$$

où $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{J(\hat{\mathbf{x}}_s)}{m-\gamma}}$ est une estimation de l'écart type (Bates & Watts, 1988). La matrice Hessienne

qui apparait dans cette relation ne peut pas être calculée directement, mais ses composantes peuvent être estimées à l'aide d'une approximation par différences finies (Thacker, 1989). Ainsi, on obtient un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance $100(1-\alpha)\%$, pour la composante \hat{x}_{sk} sous la forme :

$$x_{sk} = \hat{x}_{sk} \pm se(\hat{x}_{sk})t_{1-\alpha/2}(m-\gamma) \quad (163)$$

où $t_{1-\alpha/2}(m-\gamma)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi de Student à $m-\gamma$ degrés de liberté.

Dans l'approche proposée, le paramètre \hat{q}_s n'est pas une composante du vecteur $\hat{\mathbf{x}}_s$ mais s'obtient par la relation (138) qui fixe les valeurs admissible de l'intensité :

$$\hat{q}_s = \frac{\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}^2} \quad (164)$$

Sa variance est donnée par

$$\text{var}(\hat{q}_s) = \frac{\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{W}_m \mathbf{Var}(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{W}_m \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}^2} \quad (165)$$

Nous avons déjà indiqué que la matrice \mathbf{W}_m correspond soit à l'inverse de la matrice de covariance des observations, soit à une estimation, a priori, de cette dernière. On a donc :

$$\text{var}(\hat{q}_s) = \frac{\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)^T \mathbf{W}_m \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}^4} = \frac{1}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}^2} \quad (166)$$

soit

$$se(\hat{q}_s) = \sqrt{\text{var}(\hat{q}_s)} = \frac{1}{\|\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}_s)\|_{\mathbf{W}_m}} \quad (167)$$

Un intervalle de confiance, avec un niveau de confiance $100(1-\alpha)\%$, pour la composante \hat{q}_s est alors :

$$q_s = \hat{q}_s \pm se(\hat{q}_s)t_{1-\alpha/2}(m-1) \quad (168)$$

5.5 Cas de source multiples

On considère la situation où le rejet provient de plusieurs sources ponctuelles qui émettent simultanément depuis un ensemble de p points de Ω noté $S_p = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p\}$ (où les

$\mathbf{r}_j, j = 1, \dots, p$, désignent les coordonnées des points d'émission). Dans ce cas, le vecteur de mesure est donné par le modèle :

$$\boldsymbol{\mu}_{mo} = \sum_{j=1}^p q_j \mathbf{a}(\mathbf{r}_j) \quad (169)$$

En posant $[\mathbf{A}_p]_{ij} = a_i(r_j)$ et $[\mathbf{q}]_j = q_j$, pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, p$, cette relation s'écrit, en notation matricielle :

$$\boldsymbol{\mu}_{mo} = \mathbf{A}_p \mathbf{q} \quad (170)$$

où $\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^p$, $\boldsymbol{\mu}_{mo} \in \mathbb{R}^m$. Le problème consiste alors à trouver la combinaison de p couples (q_j, \mathbf{r}_j) qui explique au mieux les données observées, c'est-à-dire qui minimise la fonction objectif :

$$J(S_p, \mathbf{q}) = \|\boldsymbol{\mu} - \mathbf{A}_p \mathbf{q}\|_{\mathbf{W}_m}^2 \quad (171)$$

En s'inspirant de la méthode proposée au paragraphe 5.2, le problème peut être simplifié. Pour cela, on utilise la méthode des moindres carrés généralisés afin obtenir la valeur admissible du vecteur \mathbf{q} :

$$\hat{\mathbf{q}} = (\mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} \quad (172)$$

Quand on substitue ce terme dans l'équation (171), on obtient une nouvelle fonction objectif :

$$J(S_p) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}_p (\mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} \quad (173)$$

Le problème peut alors être formulé comme un problème d'optimisation combinatoire : trouver, parmi l'ensemble des n points d'émission potentiels $\Omega_n = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, l'ensemble $\hat{S}_p \subset \Omega_n$ qui explique le mieux les observations, c'est-à-dire qui minimise la fonction coût $J(S_p)$:

$$\hat{S}_p = \arg \min_{S_p \subset \Omega_n} \{J(S_p)\} \quad (174)$$

On remarque que le terme $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}^2$ est constant et positif, aussi minimiser $J(S_p)$ revient

à maximiser la fonction $Q(S_p) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}_p (\mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_m \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{A}_p^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}$:

$$\hat{S}_p = \arg \max_{S_p \subset \Omega_n} \{Q(S_p)\} \quad (175)$$

Le problème consiste donc à rechercher, parmi les C_n^p ensemble de points candidats celui qui maximise la fonction $Q(S_p)$. Cela peut être fait en utilisant des algorithmes métaheuristiques

(Genetic Algorithm, Tabu Search, Recuit Simulé parmi d'autres, voir Blum & Roli, 2003). Le principal défaut de cette méthode est que le nombre exact de sources n'est pas connu a priori : la recherche doit passer par la résolution du problème pour plusieurs valeurs de p .

5.6 Bilan de la section

Cette section a traité de la forme paramétrique du problème d'estimation du terme source. Lorsqu'il est raisonnable de supposer, a priori, que la source cherchée, \mathbf{s} , est ponctuelle et instantanée, le problème consiste à estimer un nombre limité de paramètres caractéristiques de la source : son intensité q_s et les composantes de son vecteur position \mathbf{x}_s . Le problème peut être formulé comme un problème d'optimisation dans lequel la fonction c t à minimiser dépend implicitement des paramètres recherchés. Dans le cadre de cette problématique, nous avons formalisé et généralisé une approche initialement proposée par Issartel et al. (2011). Elle consiste à transformer le problème d'optimisation en un problème plus simple dans lequel le domaine de la fonction objectif est réduit d'une dimension. Lorsque la matrice \mathbf{H}_ϕ est utilisée pour définir la fonction objectif, on retrouve la solution renormalisée, obtenue dans le cadre plus général d'une approche non paramétrique.

Dans cette section, nous avons également formulé quelques recommandations afin d'améliorer le crédit et l'utilité opérationnelle de cette approche. La méthode ne peut être utilisée efficacement que si elle fournit des résultats :

- facilement compréhensibles par le plus grand nombre,
- accompagnés d'une estimation de l'incertitude.

D'une part, nous avons proposé de nouvelles interprétations des résultats en termes de « longueur maximale du projeté orthogonal », « d'angle minimal entre les vecteurs de mesure » et de « part de norme expliquée par le modèle » qui sont des fonctions dont les valeurs sont facilement interprétables. D'autre part, nous avons développé une méthode d'évaluation de l'incertitude qui permet de tracer, sur les cartes de résultats, des régions de confiance.

Enfin, nous avons proposé d'étendre le domaine d'application de l'approche au cas de sources ponctuelles multiples qui émettent de façon simultanée.

6. EVALUATION ET MISE EN ŒUVRE OPERATIONNELLE DE LA METHODE

6.1 Evaluation des méthodes et algorithmes

Nous rappelons que nos recherches se placent dans le cadre général de l'étude des moyens de détection de contaminations (hostiles ou accidentelles) de l'air par des agents RBC en champ proche. L'ambition est de protéger des zones sensibles à l'aide d'une chaine logicielle de modélisation et de traitement de données, couplée à un réseau de capteurs. La partie inversion doit être assurée par les méthodes et algorithmes présentés dans les sections précédentes. Nous devons donc évaluer leur efficacité dans des conditions similaires à leur utilisation opérationnelle.

6.1.1 Scénarios envisagés

Plusieurs scénarios peuvent être envisagés. Par exemple :

1. La zone à protéger est une zone habitée (quartier résidentiel etc...) située à proximité directe (quelques centaines de mètres) d'installations industrielles classées. Les objectifs de la chaine logicielle sont de (i) détecter au plus tôt une contamination accidentelle, (ii) permettre la quantification du rejet. En effet, grâce à la connaissance que l'on peut avoir des activités du site concerné et des conditions météorologiques « critiques », la localisation du rejet et la nature de la contamination sont déterminées à l'avance.
2. La zone à protéger est une installation civile ou militaire sujette à une agression extérieure. La contamination est intentionnelle, son origine et sa nature sont inconnues. Les objectifs de la chaine logicielle peuvent alors être de (i) détecter au plus tôt la contamination, (ii) permettre la localisation de la source afin d'intervenir de façon appropriée sur la zone de rejet, (iii) permettre la quantification du rejet. Contrairement au cas précédent, les possibilités de situation de la source potentielle sont multiples et varient en fonction des conditions météorologiques.
3. La zone à protéger est un site industriel de production ou de manipulation de produits dangereux. La contamination est accidentelle et provient de l'intérieur du site. Dans ce cas, les possibilités de situation de la source sont généralement connues (vannes, zones de transfert de matériaux, zones de stockage). Les objectifs de la chaine logicielle

peuvent alors être de (i) détecter au plus tôt la contamination, (ii) permettre de déterminer parmi un ensemble de zones suspectées celle qui est le plus probablement responsable du rejet, (iii) permettre la quantification du débit.

4. La zone à protéger est une zone habitée, ou fortement fréquentée, sujette à une agression intérieure. Les objectifs de la chaine logicielle peuvent alors être de (i) détecter au plus tôt la contamination, (ii) permettre de localiser la source pour intervenir de façon appropriée sur la zone de rejet, (iii) permettre de quantifier le rejet. Ici aussi, les possibilités de situation de la source potentielle sont multiples et varient en fonction des conditions météorologiques.

6.1.2 *Jeux de données pour l'évaluation*

Aussi, nous avons cherché à évaluer l'efficacité de nos méthodes et algorithmes dans des conditions similaires à leur utilisation opérationnelle :

- a) Les zones à partir desquelles le rejet peut être effectué s'étendent sur quelques kilomètres au plus (champ proche, échelle locale).
- b) Les zones à protéger et leur environnement proche forment un ensemble faiblement vallonné et peu rugueux. Ce sont des zones rurales, semi-urbaines ou des sites industriels faiblement bâtis avec, au plus, quelques dizaines de bâtiments.
- c) Les rejets intentionnels ou volontaires ont de fortes chances d'être des rejets localisés (fuite d'une installation industrielle, attaque terroriste ...) dont la source peut être considérée comme étant ponctuelle.
- d) Les conditions météorologiques sont connues ou peuvent être reconstituées à partir de mesures ou de caractéristiques statistiques standards.

Nous avons commencé par réaliser un inventaire des jeux de données existants et accessibles, pouvant servir à l'évaluation de l'efficacité des méthodes et algorithmes proposés. De tels jeux regroupent les mesures de concentrations recueillies lors de campagnes expérimentales ou à l'occasion d'accidents industriels. Lors de ce travail, débuté en 2013 [W5], nous avons récupéré les résultats, et/ou la bibliographie, d'environ 70 séries d'expériences. Certains de ces jeux proviennent de bases de données librement disponibles telles que MDA (Chang et al., 2010), REDIPHEM, (Nielsen and Ott, 1996), DATEM (Draxler et al., 2002), MKV (Olesen and Chang, 2005) ou encore ATDDA (crée par John Irwin, retraité de l'agence américaine de protection de l'environnement EPA). D'autres ont été obtenues auprès d'institutions telles que la Defense Threat Reduction Agency (agence du Département de la Défense des  tats-Unis) ou l'EPA. Enfin, d'autres jeux de données nous ont été transmis directement par leur auteur comme

Alan Robins de l'université de Surrey, Dietmar Öttl de l'université de Graz, Mathias Rotach de l'université d'Innsbruck, Fritz Gassmann de l'Institut Paul Scherrer (PSI), Olivier Connan de l'IRSN, Maithili Sharan de l'IIT Delhi, ou encore William Coulombe du Desert Research Institute (DRI).

Ces jeux de données ont été classés selon différents critères. Nous avons négligé ceux réalisés aux échelles globales, continentales ou régionales pour se concentrer sur ceux dont le domaine d'étude ne dépassait pas l'échelle du kilomètre (champ proche, échelle locale). Dans ce derniers groupe, nous avons exploité à la fois des expériences réalisées sur des terrains plats homogènes et des expériences réalisées sur des terrains complexes ou en milieu urbain. Parmi les expériences réalisées sur terrains plats, nous nous sommes intéressés aux jeux de données Prairie Grass (Haugen & Barad, 1958), FFT07 (Storwald, 2007 ; Platt et al., 2008), Kitfox (Hanna et Chang, 2001). Nous nous sommes également appuyés sur l'expérience DYCE, réalisée en soufflerie (Rudd et al, 2012) ou encore sur l'expérience « DRI / WRI CO2-II » (Coulombe et al., 1999), réalisée en 1995 en même temps que l'expérience Kitfox, dont nous avons retrouvé la trace presque 20 ans plus tard et que nous avons été les premiers à exploiter [C11]. Nous avons également utilisé les jeux de données IDAHO (Sagendorf and Dickson 1974), ITT DEHLI (Sharan et al., 1996) ou RAABA (Anfossi et al., 2006) qui ont tous la particularité de faire intervenir des vents faibles. Enfin, parmi les séries d'expériences réalisées sur terrains non homogènes ou en milieu urbain, on peut citer les expériences MUST (Biltoft, 2001) et MichelStadt (Leitl et al., 2014). Nos travaux les plus aboutis (et ayant servis de support à nos publications) ont portés sur les expériences :

- DYCE, que nous avons utilisées dans les articles [A5, A11 et A12],
- FFT07, que nous avons utilisées dans les articles [A6, A8, A9, A10, A12 et A13],
- MUST que nous avons utilisées dans les articles [A7 et A8].

6.1.3 *Evaluation avec les expériences DYCE*

Description générale

La campagne d'essais a été menée en soufflerie, en 2010, dans le cadre du projet DYCE (DYnamic deployment planning for monitoring of ChEmical leaks using an ad-hoc sensor network). Un des objectifs de ce projet concernait le développement d'une solution de planification de déploiement d'un réseau de capteurs pour optimiser la collecte des données en situation d'urgence.

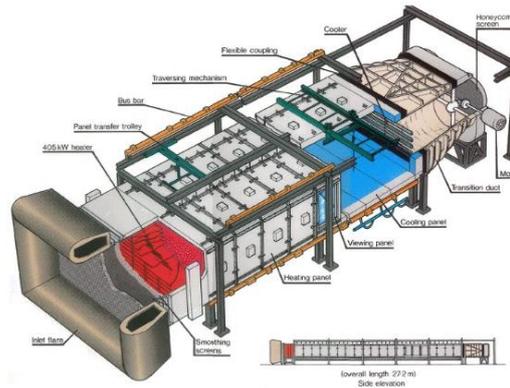


Fig. 17 : “Meteorological wind tunnel” de l’Enflo.

Les essais de dispersion ont été réalisés dans la soufflerie de l’Environmental Flow Research Centre (EnFlo), à l’université de Surrey, UK. Les dimensions de la veine d’essai étaient : 20m de long, 3,5m de large et 1,5m de haut. Dans cette soufflerie, la couche limite a été obtenue au moyen d’un système de déclenchement composé de générateurs de vortex et d’éléments de rugosité placés en amont des capteurs (Lepley et al., 2011). Pour cette série d’expérience, la hauteur de la couche limite, notée H , a été approximativement égale à 1m. Le gaz utilisé était un mélange de propane (1,5%) et d’air. Les mesures de concentration instantanée ont été réalisées au moyen de détecteurs rapides à ionisation de flamme (FIDs), à une fréquence 200 Hz. Les capteurs et la source ont été placés à environ $0,1H$ du sol. Les mesures instantanées ont été obtenues pour une vitesse moyenne de l’écoulement non perturbé, au-dessus de la couche limite, U_{ref} égale à 2,5 m/s. Les rapports entre les valeurs simulées dans la soufflerie et la réalité étaient de 1/500 pour les longueurs et de 1/4 pour les vitesses. Ainsi, en considérant que le temps adimensionné UT/H est le même dans la soufflerie et dans la réalité, 1 min dans la soufflerie correspondait, approximativement, à une durée réelle de 2 h (Rudd et al, 2012). Deux types d’expériences ont été menés. Dans le premier (« single FFID experiments »), un seul capteur mesurait la concentration sur une période de 3 minutes. 143 positions du capteur ont été testées dans des conditions identiques afin de pouvoir réaliser des mesures dans la totalité du panache. Dans le second, 4 capteurs mesuraient simultanément la concentration sur une période de 15 minutes. 11 configurations de capteurs ont été testées, voir figure 19.

Modèle de dispersion et approche inverse

Sharan (2003) rappelle que dans le cas d’un rejet ponctuel, continu, stationnaire, d’intensité Q et en l’absence de « terme perte », la répartition spatiale de la concentration est définie par une fonction de Gauss (d’où la dénomination de modèle Gaussien). Ainsi, si la source se trouve au

centre du repère et si la direction du vent est portée par l'axe des x , l'équation (5), associée aux conditions initiales (7) et aux limites (8), a pour solution :

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi U (K_y K_z)^{1/2} x} \exp \left\{ -\frac{U}{4x} \left(\frac{y^2}{K_y} + \frac{z^2}{K_z} \right) \right\} \quad (176)$$

Pour faciliter l'utilisation de cette solution, les coefficients de diffusion sont généralement exprimés en fonction des écarts types de la distribution de concentration (aussi appelés « coefficients de dispersion ») dans les différentes directions :

$$K_i = \sigma_i^2 \frac{U}{2x} \quad (177)$$

La solution (176) devient alors :

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{\pi U \sigma_y \sigma_z} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right) \right\} \quad (178)$$

Afin de minimiser les erreurs de représentativité, Rudd et al. (2012) ont ajusté les expressions des coefficients de dispersion à partir des « single FFID expériences » : ils ont montré qu'ils suivent une loi polynomiale du second ordre, voir figure 18. Ils ont aussi montré que le modèle (178) donne les meilleurs résultats pour $U=1,3m/s$.

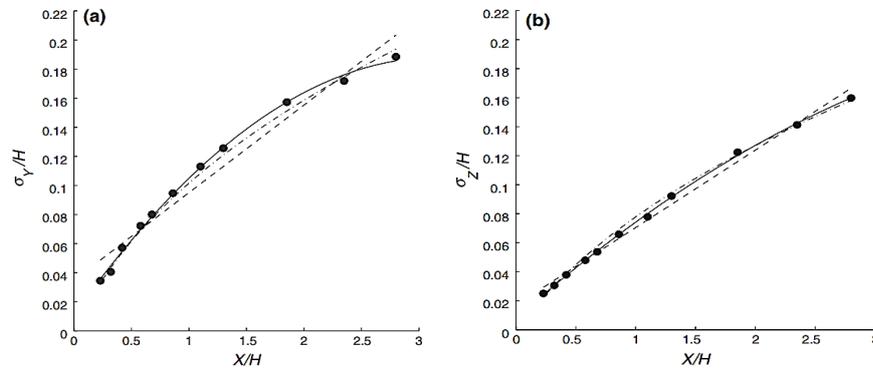


Fig. 18 : Ecarts types latérale & vertical, d'après (Rudd et al, 2012)

L'évaluation qualitative et quantitative du modèle (176), dans le cas de l'approche directe, est présentée en annexe, paragraphe 10.1.

Approche inverse

Onze différentes configurations de réseau ont été testées, voir figure 19. Nous remarquons que les configurations 1 à 5 possèdent aux moins 3 capteurs alignés perpendiculairement à la direction du vent (« configurations en ligne »), tandis que les configurations 6 à 11, sont des configurations de type « grille » (« box array configurations »). La distance moyenne entre la source et les capteurs, X_m , varie entre $0,42m$ et $2,35m$. La distance maximale entre deux capteurs, dans la direction perpendiculaire à l'axe du panache est égale à $0,8m$.

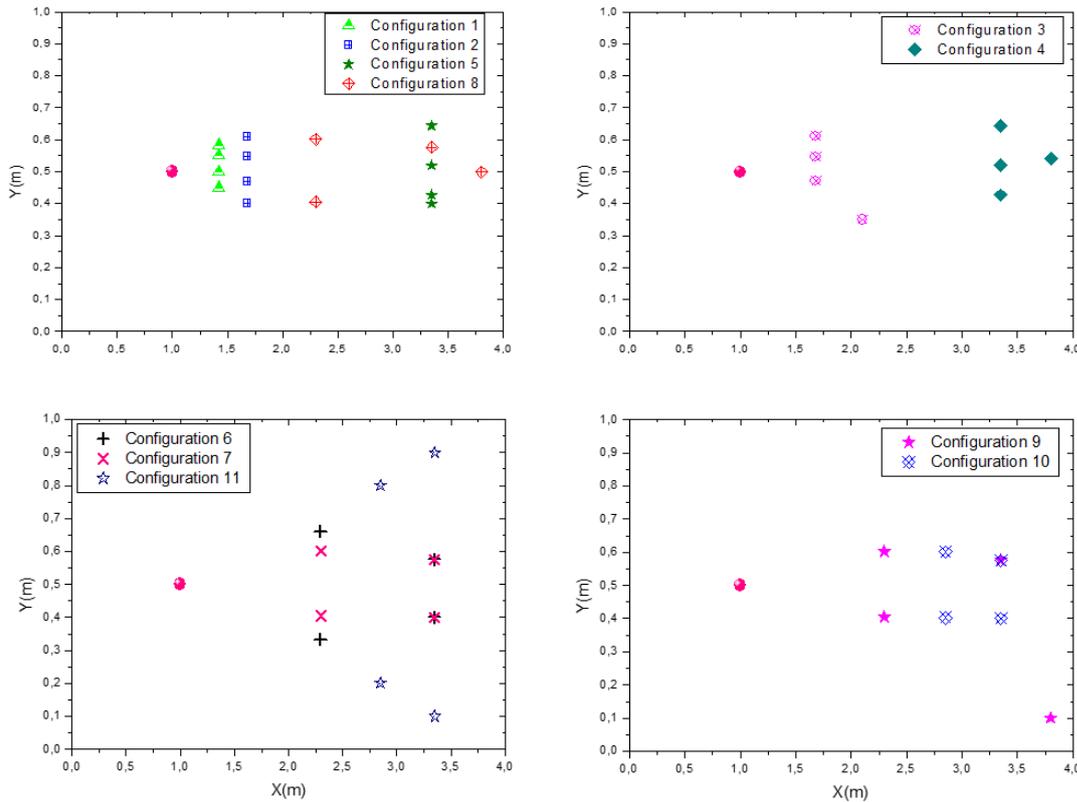


Fig. 19 : Disposition des quatre FFIDs dans la soufflerie atmosphérique pour les onze configurations testées.

L'estimation des paramètres de la source a été menée, à l'échelle de la soufflerie, sur un domaine rectangulaire de dimension $4m \times 1m$ dont la frontière avale est positionnée au niveau du capteur le plus éloigné de la source.

Le maillage est constitué de $n=2000 \times 500$ éléments carrés de dimension $dS = 2mm \times 2mm$. Pour chaque configuration, la matrice de sensibilité \mathbf{A} (constituée de $m=4$ lignes et $n=10^6$ colonnes) est calculée à l'aide du modèle (178) utilisé « à l'envers » (dispersion à partir de chaque capteur en remontant le vent). Puis, les $n=10^6$ termes diagonaux de la matrice \mathbf{W} sont obtenus à l'aide de l'algorithme présenté figure 13. Enfin, les $n=10^6$ composantes du vecteur $\mathbf{s}_{//w}$ sont calculées en utilisant la formule (110). Le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ correspond à la moyenne des vecteurs mesurés pendant les 15 minutes de l'expérience.

Sur une machine standard, de type Intel® Core™ i7-4790 CPU @3.60 GHz and 16 GB RAM, ce processus dure environ 15s par configuration. Ci-après, nous présentons les résultats détaillés de 3 configurations caractéristiques (configuration #2, réseau « en ligne », configuration #3, réseau avec seulement 3 capteurs alignés et configuration #8, réseau « en grille »). Les résultats des 8 autres configurations sont regroupées dans le tableau 2.

Figure. 20, nous avons représenté les fonctions de visibilité des trois réseaux. Les fortes valeurs de $\varphi(\mathbf{x})$ sont en blanc et sont localisées en amont de chaque capteur. Au fur et à mesure que l'on s'approche de la source, $\varphi(\mathbf{x})$ diminue (couleur grise). Les zones non couvertes par les réseaux sont en noir. Les cartographies des valeurs de $s_{//w}$ sont représentées figure 21. Les valeurs les plus fortes sont représentées en rouge, les valeurs les plus faibles en bleu. Nous observons que la position de la source est mieux estimée pour les configurations 2 et 3, que pour la configuration 8.

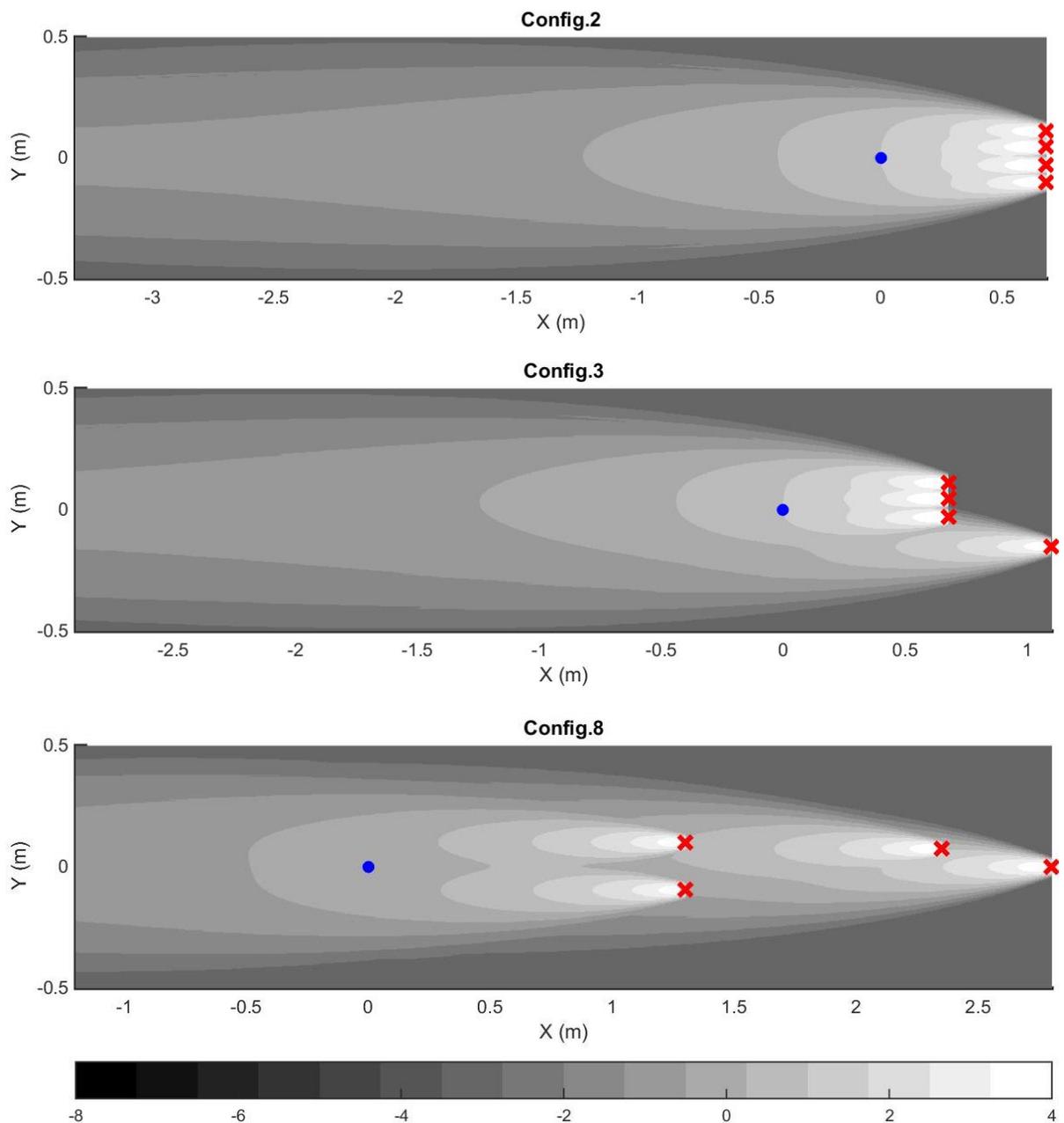


Fig. 20 : Représentation logarithmique de la visibilité $\varphi(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) / dS$ pour les configurations 2, 3 & 8. Les capteurs sont représentés en rouge, la source réelle en bleu.

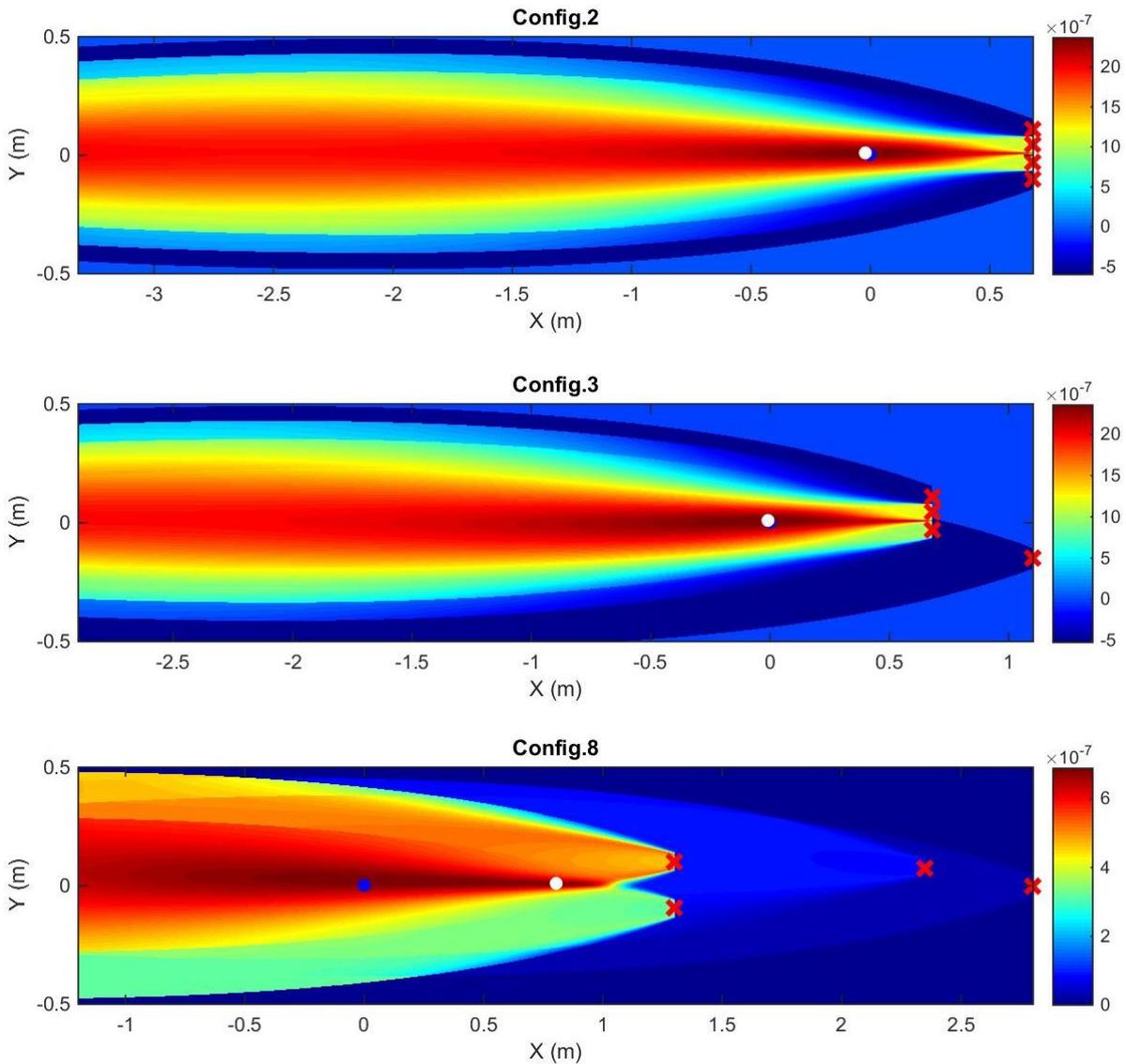


Fig. 21 : Cartographies des valeurs de $S_{//w}$. Les capteurs sont représentés en rouge, la source réelle en bleu, la position estimée de la source est en blanc.

Le tableau 2 présente les résultats pour l'ensemble des configurations. La première et la deuxième colonne indiquent respectivement la référence de la configuration et la distance moyenne source-capteurs, X_m . Les estimations des coordonnées de la source \hat{x}_s , \hat{y}_s et de son intensité \hat{q}_s sont données en colonne 3, 4 et 5. L'erreur relative de localisation, Er_l (distance observation-estimation, divisée par X_m) et l'erreur relative d'intensité $Er_q = |q_s - \hat{q}_s| / q_s$ sont données en colonnes 6 et 7. Afin de pouvoir comparer avec les résultats de Rudd et al. (2012),

leurs résultats sont rappelés en colonnes 8 et 9. Des derniers ont été obtenus à l'aide d'une méthode itérative, basée sur l'algorithme de Gauss-Newton, proposée par Rodgers (2010).

Config. number	X_m	\hat{x}_s	\hat{y}_s	\hat{q}_s	Er_l	Er_q	Er_l	Er_q
	(m)	(m)	(m)	(Kg/s) $\times 10^{-7}$	(-)	(-)	(-)	(-)
	<i>Present study</i>						<i>(Rudd et al., 2012)</i>	
1	0.42	-0.028±0.09	0.01±0.008	9.6±0.10	7.08%	7.46%	6,61%	10,00%
2	0.68	-0.02±0.28	0.008±0.02	9.05±0.19	3.17%	1.48%	2,68%	10,00%
3	0.785	-0.008±0.7	0.01±0.05	8.85±0.38	1.63%	0.73%	1,62%	0,00%
4	2.4625	0.41±4.16	0.04±0.2	6.09±0.37	17%	31.7%	18,90%	30,00%
5	2.35	0.13±0.24	0.04±0.005	5.87±0.12	5.87%	19.0%	6,32%	20,00%
6	1.825	-0.374±10.3	0.03±0.3	9.17±0.78	20.6%	2.7%	-	-
7	1.825	0.19±4.3	0.02±0.13	6.91±0.45	10.5%	22.5%	13,98%	20,00%
8	1.9375	0.8±0.63	0.008±0.02	4.87±0.21	41.5%	45.4%	15,25%	30,00%
9	1.9375	0.10±3.13	0.022±0.09	7.47±0.24	5.39%	16.3%	8,57%	20,00%
10	2.1	1.21±0.62	0.008±0.02	3.23±0.11	57.8%	63.7%	23,53%	30,00%
11	2.1	-0.084±10.1	0.032±0.02	6.21±2.34	4.28%	30.3%	-	-

Tab. 2 : Estimations et erreurs relatives pour les 11 configurations DYCE

Les vraies valeurs sont $x_s=0$, $y_s=0$, $q_s=8.92 \times 10^{-7}$.

Nous remarquons que la méthode de renormalisation fonctionne et converge dans tous les cas. Nos estimations sont similaires à celles obtenues par Rudd et al. (2012). Pour toutes les configurations, l'erreur sur la position latérale de la source est très faible et varie peu (l'erreur relative $|y_s - \hat{y}_s| / X_m$ est inférieure à 2,5% dans tous les cas). Les erreurs sur la position longitudinale et sur l'intensité sont plus importantes. Pour les configurations « en ligne » situées près de la source (configurations #1, #2 et #3), l'erreur relative de localisation est inférieure ou égale à 7% et l'erreur relative d'intensité est inférieure à 7,5%. Pour la configuration « en ligne » la plus éloignée de la source (configuration #4) l'erreur de localisation atteint 17%. Deux configurations « en grille » (#7 et #9) obtiennent des résultats corrects. Pour les autres, les résultats globaux sont nettement moins satisfaisants que ceux des configurations « en ligne ». Ceci montre que la configuration spatiale du réseau est un paramètre déterminant dans les problèmes d'estimation de sources. En effet, malgré un modèle parfaitement ajusté, des données peu bruitées et l'absence d'obstacle, on observe de fortes variations dans les estimations. On voit assez facilement que les meilleurs réseaux sont ceux obtenus avec des

configurations « en lignes » et situées proches de la source (configurations #1, #2 et #3 situées près de la vraie source). Ceci peut être formulé en utilisant la notion de visibilité : les paramètres de la source sont mieux reconstitués lorsqu'elle se trouve dans une zone de forte visibilité.

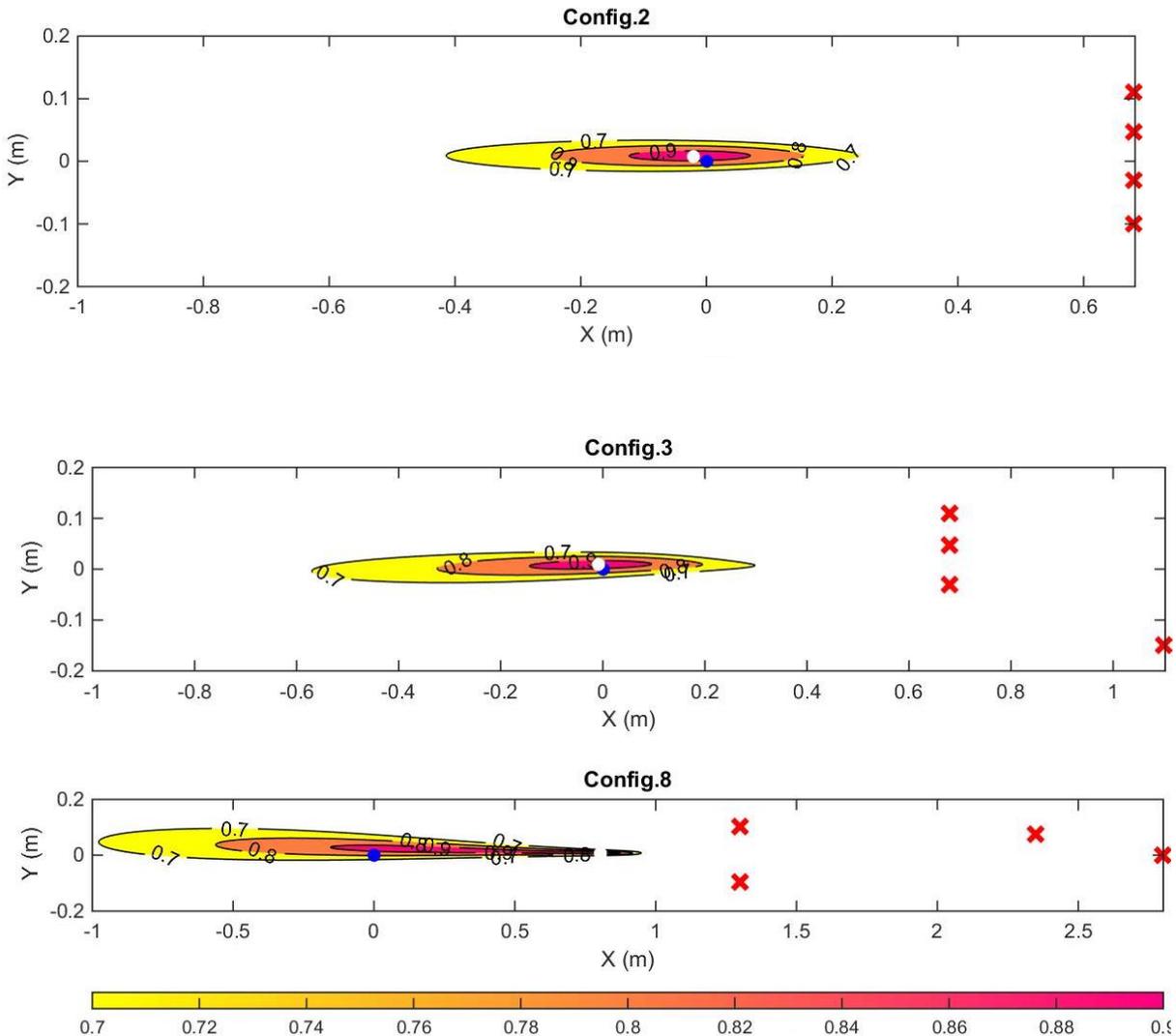


Fig. 22 : Régions de bonne estimation. Les capteurs sont représentés en rouge, la source réelle en bleu, la position estimée de la source est en blanc [A11].

La figure 22 montre l'incertitude sur les résultats, exprimée sous forme de « régions de bonne estimation » obtenues par l'équation (153), tandis que la figure 23 montre (i) les résultats exprimés en termes de « part de norme expliquée par le modèle », équation (151), et (ii) l'incertitude matérialisée sous la forme d'une région de confiance à 95%, équation (161). Ces régions sont des ellipsoïdes peu larges étirées dans la direction du vent moyen. Ceci indique que l'incertitude sur la position latérale est plus faible que sur la position longitudinale. La forme de ces régions dépend à la fois de la valeur du carré des résidus au point d'estimation et du niveau de confiance recherché. A niveau de confiance égal, plus les résidus sont faibles,

moins l'ellipse est étirée. Au contraire, plus les résidus sont élevés plus la région de confiance est vaste. Elle peut même, dans des cas extrêmes, englober la quasi-totalité du domaine.

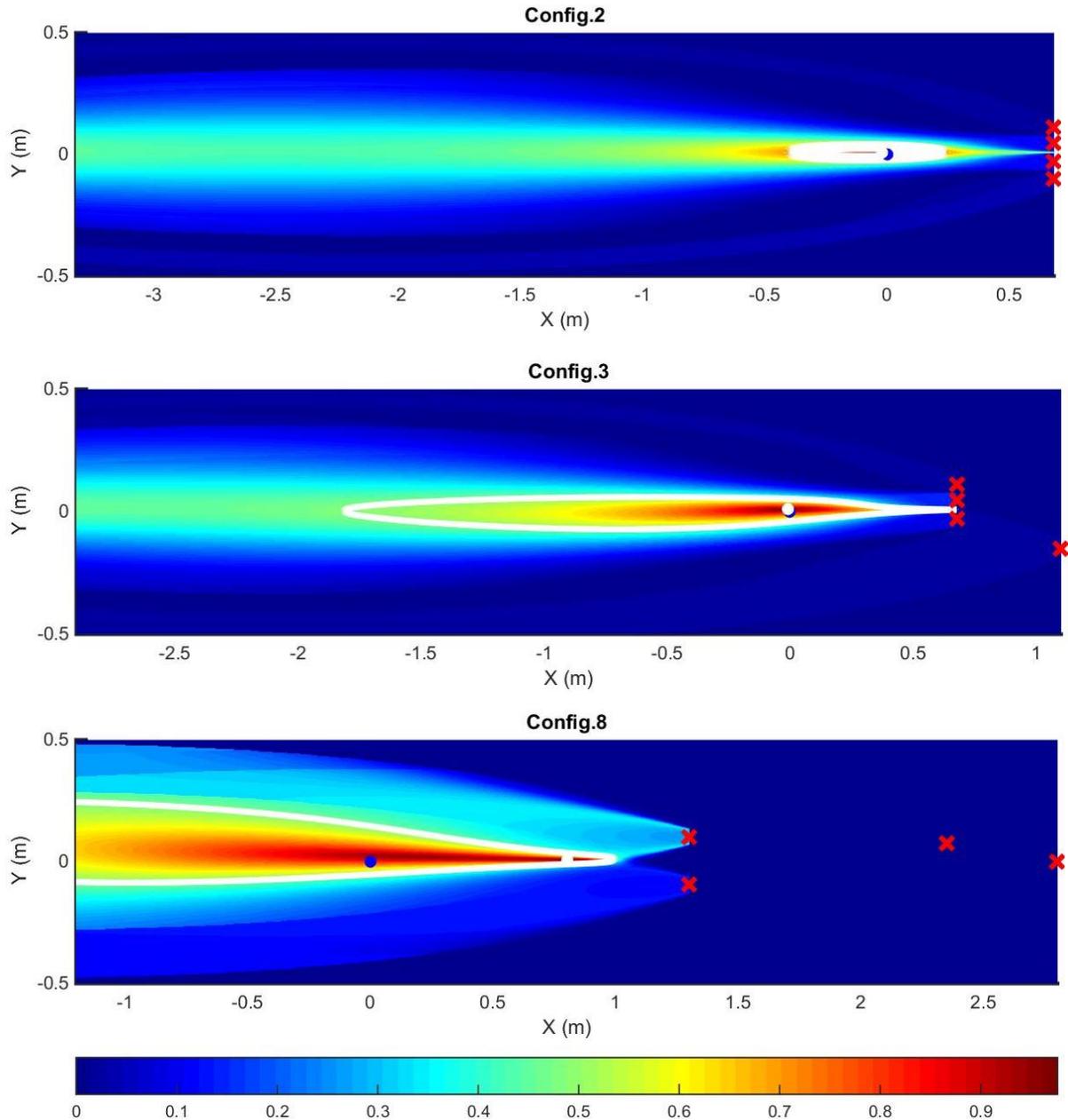


Fig. 23 : Cartographies des valeurs de $R(\mathbf{x})$ & régions de confiance à 95%.

On notera que les résultats présentés figure 23, avec des valeurs variant entre 0 et 1, sont plus « lisibles » que ceux présentés figure 21 avec une échelle de valeurs variant à chaque configuration. Tous ces résultats mettent en évidence l'applicabilité de la technique d'inversion, couplée avec un modèle Gaussien, pour déterminer à la fois, la position et l'intensité d'une source continue ponctuelle, avec dispersion en terrain plat homogène.

6.1.4 Evaluation avec les expériences FFT07

Description générale

La campagne d'essais américaine, FUsing Sensor Information from Observing Networks (FUSION) Field Trial 2007 (ou "FFT 07") a été réalisée en septembre 2007 sur une vaste zone située dans l'Utah appartenant à l'Armée de terre des États-Unis (Dugway Proving Ground, DPG). Cette campagne a été financée par la Defense Threat Reduction Agency (DTRA), agence du Département de la Défense des États-Unis. Ces expériences, à petite échelle (approximativement 500m), ont été menées spécifiquement dans le cadre d'un projet de développement et de validation d'algorithmes d'identification de sources d'émissions.

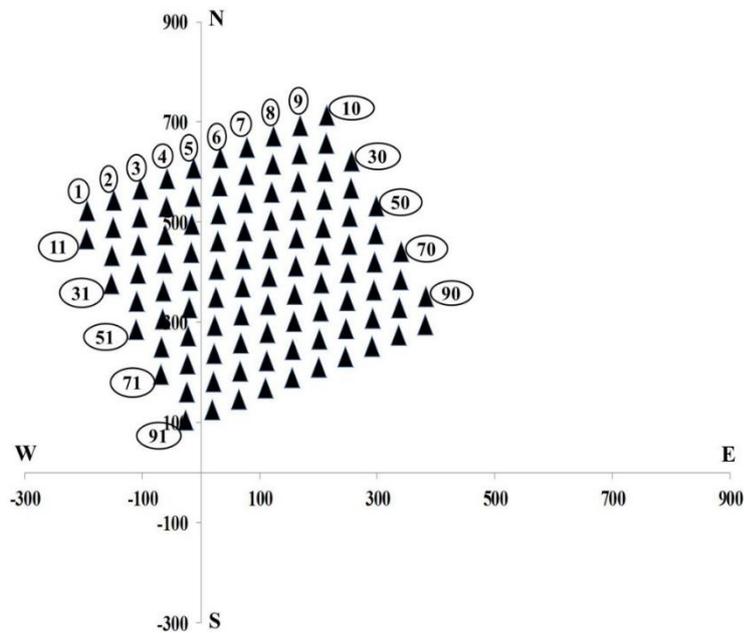


Fig. 24 : Dispositif expérimental FFT07.

Le site expérimental désertique, uniforme et homogène, était partiellement recouvert d'herbacées et de petits arbustes (la longueur de rugosité retenue a été $z_0 = 0,012 \pm 0,002m$). Le traceur utilisé était du propylène (C_3H_6). Les concentrations ont été mesurées à la fréquence de 50 Hz par 100 détecteurs à photo-ionisation (PIDs), placés sur une grille de 10 lignes et 10 colonnes, couvrant une surface totale de $475m \times 450m$, voir figure 24. La distance était de 25m entre les lignes, 50m entre les colonnes. Les vents dominants soufflant du sud-est vers le nord-ouest, la grille a été inclinée de 25° afin que les lignes soient perpendiculaires à cette direction. Les capteurs, comme la source, étaient placés à 2m au-dessus du sol. Sur les 84 expériences réalisées, on connaît aujourd'hui les caractéristiques complètes de 10 expériences « avec source

unique et rejet continu ». Sept d'entre elles correspondaient à des cas d'atmosphère stable, trois à des cas d'atmosphère instable. L'expérience 14 a duré 7 minutes, les expériences 15, 16, 45, 46, 54 et 64 ont duré 10 minutes, toutes avec un débit de 11,39g/s. Les expériences 7 et 30 ont duré 10 minutes avec des débits respectifs de 5,3 et 3,43 g/s. L'expérience 13 a duré 5 minutes avec un débit de 5,7 g/s. Les données météorologiques (vitesses du vent et températures) ont été mesurées à 5 niveaux (2, 4, 8, 16 et 32m), à l'aide de capteurs ultrasoniques placés sur 3 tours de 32m de hauteur, localisées au centre du domaine et à 750m au sud-est et au nord-ouest du centre du domaine expérimental. Les valeurs indiquées dans le tableau 3 correspondent à des valeurs moyennées sur la durée des expériences. Plusieurs emplacements pour la source ont été testés.

Expérience	Vitesse moyenne du vent [m/s]	Direction du vent [Degrés]	Débit de la source [g/s]	Durée du rejet [min]
Stable				
7	2,7	158	5,3	10
13	0,87	162	5,7	5
14	3,1	121	11,39	7
15	2,1	151	11,39	10
30	3,1	140	3,43	10
46	2,2	123	11,39	10
64	0,99	150	11,39	10
Unstable				
16	4,1	313	11,39	10
45	2,4	253	11,39	10
54	3,5	146	11,39	10

Tab. 3 : Caractéristiques des 10 essais retenus.

Modèle de dispersion et approche inverse

La majorité des calculs présentée ici a été réalisée par S. Singh, post-doctorant au sein de l'équipe. Pour ces expériences, au lieu d'utiliser le modèle Gaussien standard (178), nous avons choisi le modèle de dispersion analytique développé à l'ITT de Delhi par Sharan et al., (1996), dont la validité s'étend aux faibles vents ($U < 2 \text{ ms}^{-1}$). Ce modèle, facile à mettre en œuvre, est connu pour fonctionner raisonnablement bien dans la plupart des régimes météorologiques:

$$C(x, y, z) = \frac{Qx}{2\pi U \sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2}\right] \left\{ \frac{1}{p} \exp\left[-\frac{x}{\sigma_x} p\right] + \frac{1}{q} \exp\left[-\frac{x}{\sigma_x} q\right] \right\} \quad (179)$$

$$\text{avec } p = \left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z+H)^2}{\sigma_z^2} \right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } q = \left[\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{(z-H)^2}{\sigma_z^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Dans cette expression, x désigne la distance par rapport à la source suivant la direction du vent, y la distance par rapport à l'axe du panache dans la direction perpendiculaire à la direction du vent et z la hauteur au-dessus du sol. Q est le taux d'émission, U la vitesse moyenne du vent, et H la hauteur de rejet. Avec ce modèle, on prend généralement $\sigma_x = \sigma_y$ et on utilise les formules de Gryning et al. (1987) pour exprimer σ_y et σ_z . L'évaluation qualitative et quantitative du modèle (179), dans le cas de l'approche directe, est présentée en annexe, paragraphe 10.1.

Pour l'approche inverse, l'estimation des paramètres de la source a été menée sur un domaine rectangulaire de dimension $1200m \times 1200m$. Le maillage est constitué de $n=400 \times 400$ éléments carrés de dimension $dS = 3m \times 3m$. Pour chaque configuration, la matrice de sensibilité \mathbf{A} est constituée de m lignes (m variant en fonction des expériences) et $n=1,6.10^4$ colonnes. Ses lignes ont été calculées à l'aide du modèle (179) utilisé « à l'envers » (dispersion à partir de chaque capteur en remontant le vent). Puis les $n=1,6.10^4$ termes diagonaux de la matrice \mathbf{W} sont obtenus à l'aide de l'algorithme présenté figure 13. Enfin, les $n=1,6.10^4$ composantes du vecteur $\mathbf{s}_{//w}$ sont calculées en utilisant la formule (110). Le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ correspond à la moyenne des vecteurs mesurés pendant la durée de l'expérience. Sur une machine standard, de type Intel® Core™ i5-3427U CPU@ 1.80GHz \times 4 avec 8 GB RAM, ce processus dure environ 20s par expérience. Ci-après, nous présentons les résultats détaillés de 4 expériences caractéristiques (cas #7, #13, #15, #45). Les résultats des autres cas sont regroupés dans le tableau 4.

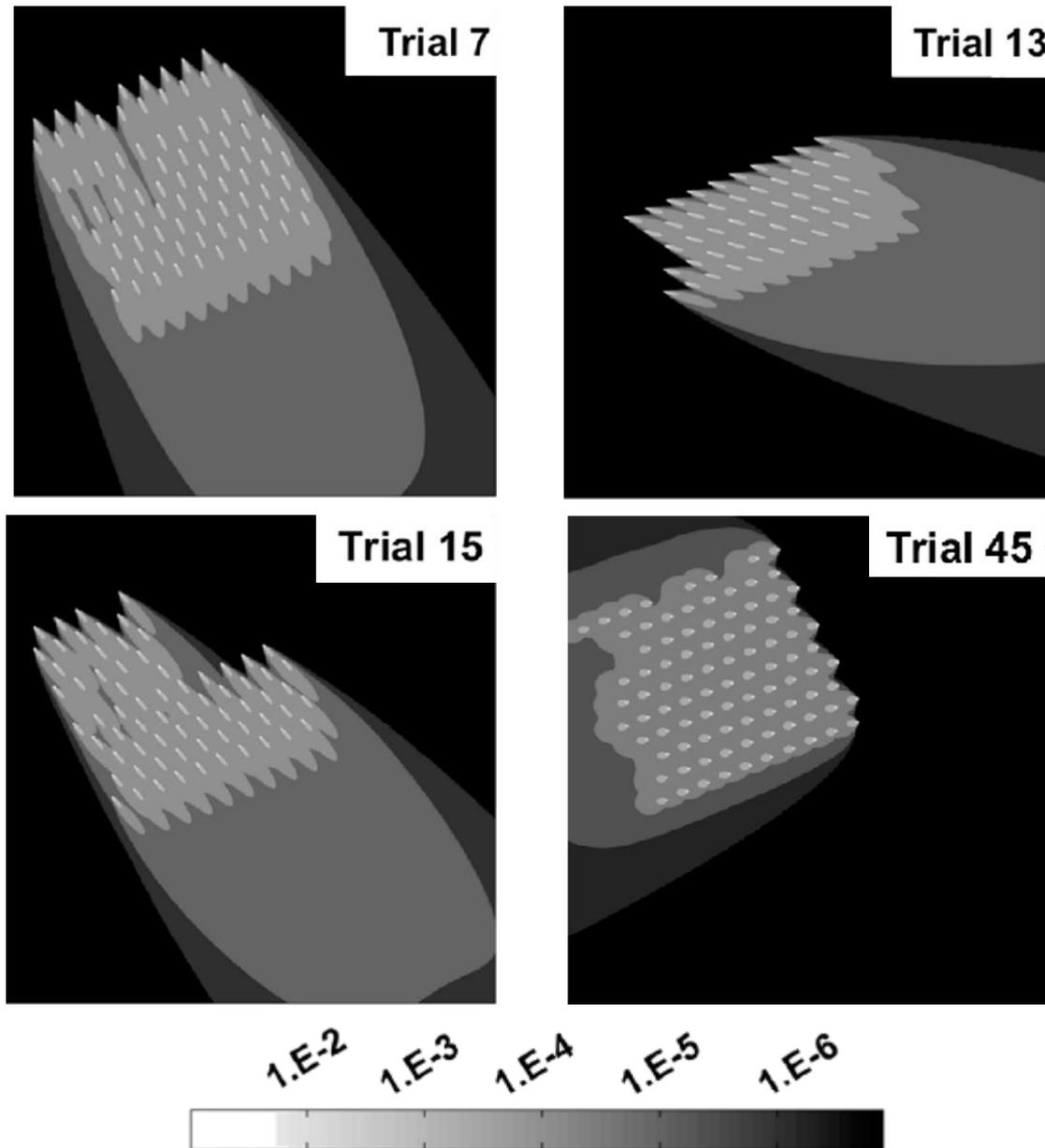


Fig. 25 : Représentation logarithmique de la visibilité $\varphi(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) / dS$ [A6].

Figure 25, nous avons représenté les fonctions de visibilité du réseau pour ces 4 expériences. Les fortes valeurs de $\varphi(\mathbf{x})$ sont en blanc et sont localisées en amont de chaque capteur. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du réseau, $\varphi(\mathbf{x})$ diminue (couleur grise). Les zones non couvertes sont en noir. Les régions bien observées se trouvent à moins de 100m du réseau au vent du réseau, les moins bien à plus de 500m. Dans tous les cas, la source réelle se trouve dans une région où la visibilité est bonne. Les cartographies des valeurs de $s_{//w} / \max(s_{//w})$ sont représentées figure 26. Les valeurs les plus fortes sont représentées en rouge, les valeurs les plus faibles en bleu. Pour les cas 7,13 et 16 les zones où les valeurs de $s_{//w}$ sont élevées sont assez étendues (« flat maximum »). Seul le cas 15 présente un « sharp maximum ». Ces résultats

sont confirmés par les régions de confiance à 95% tracées figure 27. Nous observons que la position de la source la mieux estimée correspond au cas #7, la moins bien au cas #13. Pour ce dernier cas, les fluctuations de direction du vent pendant l'expérience peuvent expliquer la présence de deux zones où $s_{//w}$ est proche du maximum.

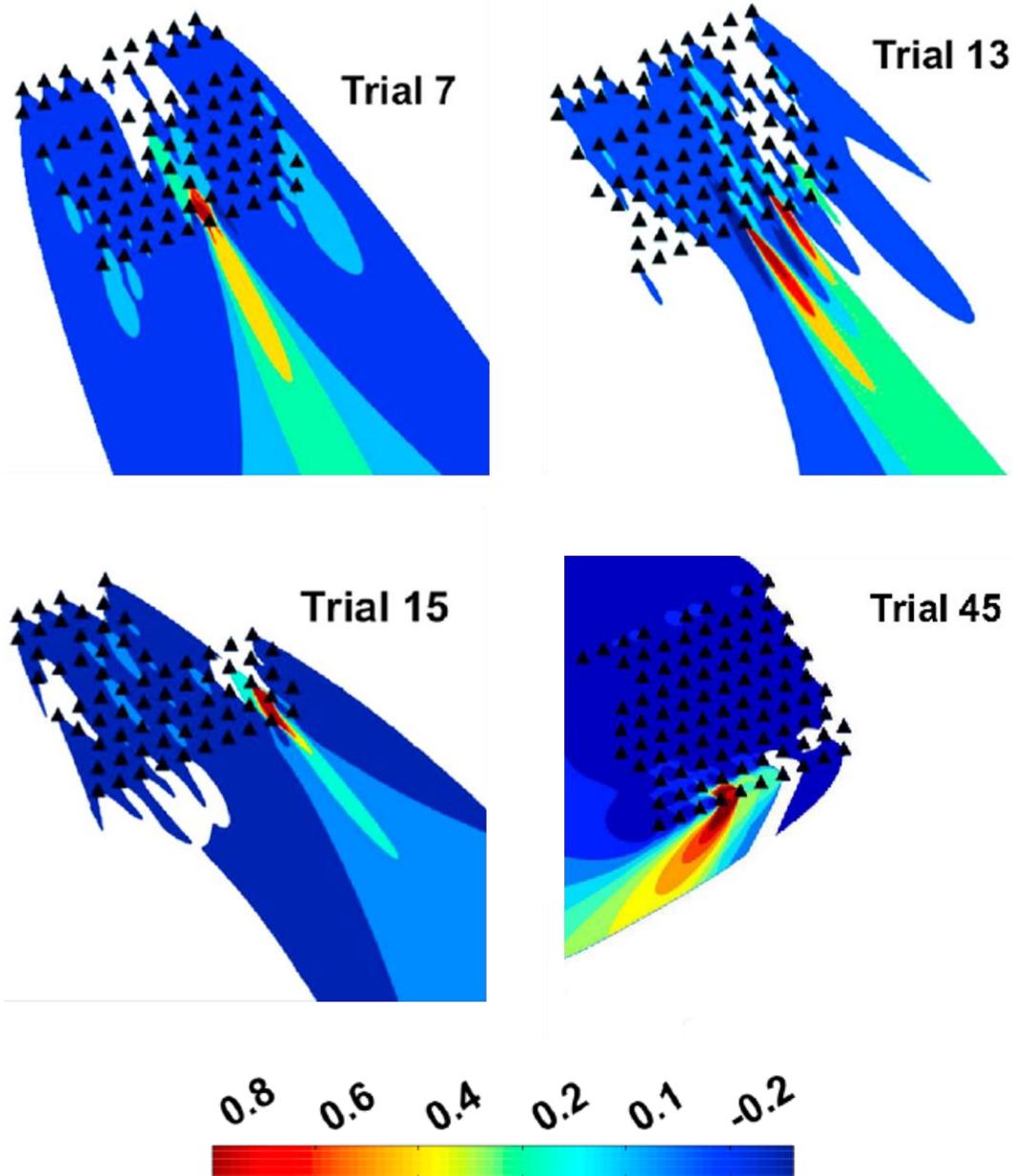


Fig. 26 : Cartographies des valeurs de $s_{//w} / \max(s_{//w})$. Les capteurs sont représentés en noir [A6].

Le tableau 4 présente les résultats pour l'ensemble des cas. La première et la deuxième colonne indiquent respectivement la référence de l'expérience et le nombre de capteurs actifs. L'intensité de la source q_s et son estimation \hat{q}_s sont données en colonne 3 et 4. L'erreur relative

d'intensité $E_q = \hat{q}_s / q_s$ et l'erreur de localisation, E_l (distance observation-estimation) sont données en colonnes 5 et 6. Globalement, l'erreur d'estimation moyenne est de 22m.

Config. number	m	q_s	\hat{q}_s	E_q	E_l
	()	(g/s)	(g/s)	()	(m)
7	84	5,3	6,9±1,06	1,25	3
13	89	5,7	3,6±0,57	0,63	48,5
14	49	11,39	8,02±1,07	0,70	57,3
15	69	11,39	9,7±2,27	0,85	25,6
16	69	11,39	7,04±0,79	0,65	30,6
22	92	11,39	11,7±0,68	1,03	21
30	90	3,43	4,9±0,37	1,43	10,8
45	92	5,3	13,7±1,16	1,2	15
46	94	5,7	10,1±1,19	0,89	6,7
54	93	11,39	12,2±1,48	1,07	9,5
64	96	11,39	14,5±1,48	1,27	21,2

Tab. 4 : Estimations et erreurs pour les 10 essais retenus

Les données FFT07 ont largement été partagées auprès des équipes de recherche afin qu'elles puissent évaluer leurs approches. Certains travaux ont été publiés. On peut citer ceux de Senocak (2010), avec l'outil « Stochastic Event Reconstruction », ceux d'Annunzio et al. (2012), avec la technique « Lagrangienne Entity Backtracking », ou encore ceux de Singh et Rani (2014) qui ont utilisé une approche des moindres carrés similaire à celle décrite au paragraphe 5.1 (avec $\mathbf{W}_m = \mathbf{I}_m$).

Lorsque cela était possible, nous avons comparé nos résultats avec les leurs, tableau 5. Il faut noter que, pour cette comparaison, seules les mesures de concentration non nulles ont été prises en compte. Même si les résultats obtenus sont similaires à ceux Singh et Rani (2014) et bien meilleures que ceux d'Annunzio et al. (2012), la mise à l'écart des mesures nulles ne semble pas justifiée. En effet, ces mesures nulles constituent de l'information pertinente que la méthode de renormalisation est à même d'exploiter.

Config. number	Senocak (2010)		d'Annunzio et al. (2012)		Singh et Rani (2014)		Present study	
	m	El	m	El	m	El	m	El
7	84	10			19	3	19	3
13			80	81,6	38	47,4	38	48,5
14					19	57,3	19	57,3
15	69	10	80	40,9	33	21,6	33	25,6
16					29	29,5	29	30,6
22					48	21	48	21
30					19	10,8	19	10,8
45					13	4,2	13	15
46					47	9,5	47	6,7
54			80	48,9	22	33,5	22	9,5
64					68	21,2	68	21,2

Tab. 5 : Comparaison avec d'autres approches.

Au cours de cette étude, nous avons également tracé, figure 27, les régions de confiance à 95% définies au paragraphe 5.4. On remarque que les cas où les valeurs de $s_{//w}$ présentent un « flat maximum » correspondent à de larges régions de confiance (cas 45) et que les cas où $s_{//w}$ présente un « sharp maximum » correspondent à des zones de confiance relativement peu étendues.

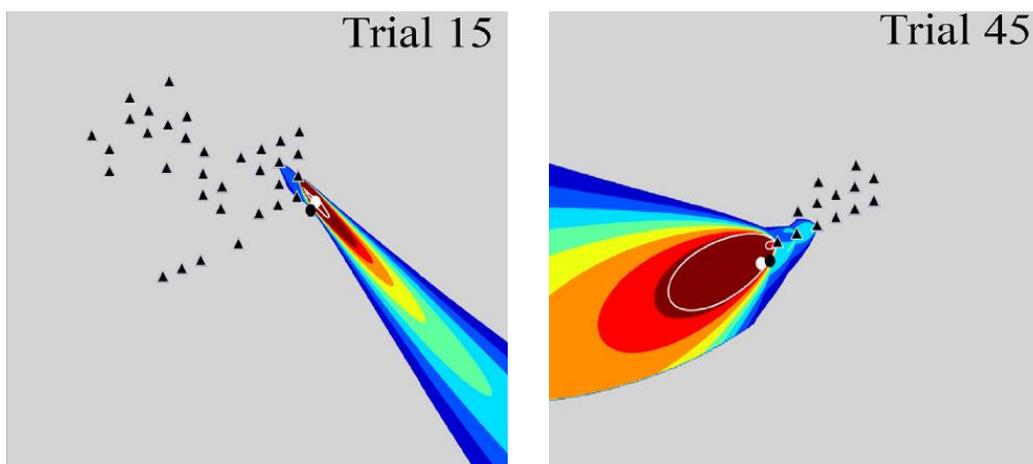


Fig. 27 : Régions de confiance à 95%. La position de la source réelle apparaît en noir, la position de la source estimée en blanc [A8].

Nous avons également comparé, figure 28, nos résultats (pour le cas #7) avec ceux donnés par d'autres approches proposées dans la littérature :

- solution de norme minimale, équation (92),
- solution régularisée, équation (124), avec $\lambda^2 = 0,25$,
- solution Bayésienne, équation (134), avec $\mathbf{Q} = \sigma_1^2 \mathbf{I}_m$ et $\mathbf{B} = \sigma_2^2 \mathbf{I}_n$ où σ_1^2 et σ_2^2 sont les variances des erreurs d'observation et d'ébauche déterminées empiriquement,
- solution du maximum d'entropie sur la moyenne, Bocquet, (2005).

Nous voyons que toutes ces solutions atteignent leur maximum au niveau d'un capteur : le 11^{ème} pour la solution Bayésienne, le 17^{ème} pour les trois autres. Grâce à la pondération optimale, la méthode de renormalisation évite ce phénomène et la source est retrouvée dans un rayon de 6m.

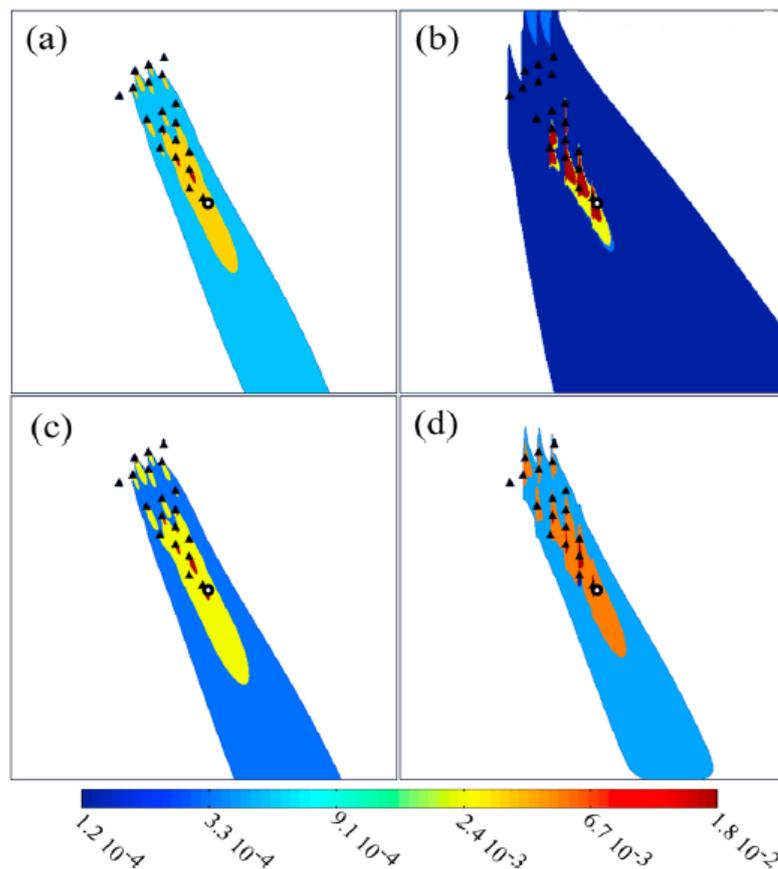


Fig. 28 : Cas No 7, cartographies des valeurs de $\hat{s} / \max(\hat{s})$ pour (a) la solution régularisée, (b) la solution Bayésienne, (c) la solution de norme minimale, (d) la solution du maximum d'entropie sur la moyenne [A9].

Tous ces résultats mettent en évidence l'applicabilité de la méthode de renormalisation, couplée avec un modèle de dispersion analytique. Nous sommes capables d'estimer à la fois la position et l'intensité d'une source continue ponctuelle lorsque la dispersion a lieu sur un terrain plat homogène et dans des conditions atmosphériques stables et convectives. Une seconde étude, non présentée ici, a été menée sur les mêmes expériences mais avec un modèle de dispersion issu de la Mécanique des Fluides Numérique (CFD). Nous présentons ce modèle ci-après dans le cadre de l'évaluation de la méthode avec les expériences MUST.

6.1.5 *Evaluation avec les expériences MUST*

Description générale

Les données disponibles proviennent à la fois de la campagne d'essais MUST (Mock Urban Setting Test) menée dans le désert de l'Utah (USA) en septembre 2001 et d'expériences réalisées ultérieurement en soufflerie. Egalement financée par DTRA, son objectif était d'aider au développement et à la validation des modèles numériques. Sur le terrain, 120 containers maritimes, de taille identique (2,54m de haut, 12,2m de long et 2,42m de large), ont été alignés régulièrement en 10 rangées de 12 containers, espacés de 12,9m dans la direction longitudinale et de 7,9m dans la direction latérale. Les containers, qui couvraient au total une surface de près $200m \times 200m$, ont été orientés afin que leur longueur soit perpendiculaire au vent dominant. Les conditions de stratification allaient de stable à neutre.



Fig. 29 : Photographie du dispositif expérimental MUST, d'après Bilstoft (2001).

68 essais ont été réalisés (63 rejets continus et 5 instantanés). Le gaz non réactif (du propylène, C_3H_6) a été émis de 37 emplacements différents, situés soit au sein de la grille de containers soit directement en amont, à 6 hauteurs différentes. 40 PIDs, placés sur 4 lignes horizontales à la hauteur de 1,6m, ont été utilisés. Des capteurs supplémentaires, placés sur un mât ont également mesuré les concentrations à différentes hauteurs. Les 63 expériences avec rejet continu ont duré 15 minutes.

Yee et Bilstoft (2004) ont sélectionné, dans 20 séries temporelles de 15 min, des périodes de 200s considérées comme étant quasi-stationnaires. La durée de ces échantillons est supérieure au temps de trajet du traceur dans le domaine.

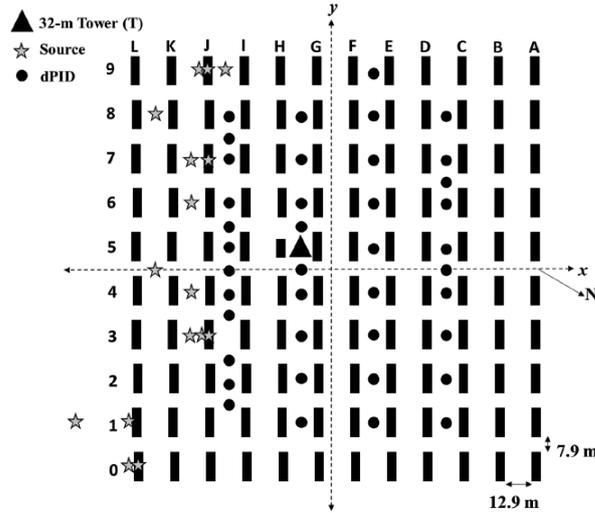


Fig. 30 : Plan du dispositif expérimental MUST [A7].

Les caractéristiques de ces 20 expériences sont rappelées dans le tableau 6.

Expérience e	Nom (jjhhmm)	Vitesse moyenne du vent [m/s]	Direction du vent [Degrés]	Débit de la source [l/min]	Hauteur du rejet [m]
1	2640138	2,35	17	175	0,15
2	2640246	2,01	30	200	0,15
3	2671852	3,06	-49	200	0,15
4	2671934	1,63	-48	200	1,8
5	2672033	2,69	-26	200	1,8
6	2672101	1,89	-10	200	0,15
7	2672150	2,3	36	200	0,15
8	2672213	2,68	30	200	1,8
9	2672235	2,32	36	200	2,7
10	2672303	2,56	17	200	1,8
11	2681829	7,93	41	225	1,8
12	2681849	7,26	-50	225	0,15
13	2682256	5,02	-42	225	0,15
14	2682320	4,55	-39	225	2,7
15	2682353	4,49	-47	225	5,2
16	2692054	3,34	39	225	1,3
17	2692131	4	39	225	1,3
18	2692157	2,98	43	225	2,7
19	2692223	2,63	26	225	1,3
20	2692250	3,38	36	225	1,3

Tab. 6 : Caractéristiques des 20 essais retenus. La direction du vent est donnée par rapport à l'axe des x de la figure 30.

Modèle de dispersion et approche inverse

La présence d'obstacles perturbe de façon significative l'écoulement de l'air et donc le phénomène de transport-diffusion. Dans ce cas, les modèles analytiques tels que ceux utilisés dans les études présentées ci-avant ne sont plus adaptés. Il est alors nécessaire d'utiliser des modèles issus de la Mécanique des Fluides Numérique (CFD). Ces modèles permettent, dans un premier temps, de calculer les champs de vent turbulents en résolvant les équations de Navier-Stokes sur un maillage au sein duquel les obstacles sont explicitement représentés. Dans un second temps, les champs de vent sont utilisés pour calculer l'évolution de la concentration du traceur en résolvant l'équation de transport-diffusion (1) sur le même maillage. Parmi les techniques disponibles, on distingue celles basées sur la résolution des équations de Navier-Stokes moyennées (Reynolds Average Navier-Stokes - RANS), la simulation des grandes échelles (Large Eddy Simulation, LES) et la simulation directe (Direct Numerical Simulation, DNS). D'un point de vue opérationnel, seule l'approche RANS (beaucoup moins coûteuse en temps de calcul que les deux autres) est envisageable. Comme nous l'avons fait dans l'équation (2), les variables sont décomposées en parties moyennes et fluctuantes et les équations sont statistiquement moyennées. Les nouvelles inconnues qui apparaissent sont prises en compte au travers de modèles de fermeture (dits de turbulence). De façon pratique, l'équation de transport-diffusion moyennée correspond à l'équation (3). Pour la résoudre, l'inconnue supplémentaire (le flux turbulent) est reliée au gradient de la concentration moyenne par la formule :

$$\langle \mathbf{u}'(t, \mathbf{x}) c'(t, \mathbf{x}) \rangle = -K_t(t, \mathbf{x}) \nabla C(t, \mathbf{x}) \quad (180)$$

où $K_t(t, \mathbf{x})$ est la diffusivité turbulente. Ainsi, en l'absence de terme perte, le champ de concentration moyen est solution de :

$$\frac{\partial C(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla C(t, \mathbf{x}) = \nabla \cdot [(D + K_t) \nabla C(t, \mathbf{x})] + s(t, \mathbf{x}) \quad (181)$$

L'étude présentée ici a été réalisée dans le cadre de projet DISCARD. La majorité des calculs a été réalisée par P. Kumar, post-doctorant au sein de l'équipe, à l'aide du logiciel industriel Fluidyn-PANACHE. Celui-ci, basé sur une approche RANS, est spécifiquement dédié à l'étude des écoulements atmosphériques et de la dispersion de polluants sur sites industriels ou urbains. La résolution des équations moyennées repose sur une méthode de volumes finis du second ordre. La discrétisation en temps est basée sur un schéma implicite qui permet l'analyse des phénomènes transitoires. Dans Fluidyn-PANACHE, plusieurs modèles de turbulence sont disponibles. Pour cette étude, le modèle $k - \varepsilon$ a été choisi. Avec ce modèle il faut, dans un

premier temps, résoudre un système d'équation constitué de l'équation décrivant l'évolution de la vitesse moyenne $U(t,x)$, de l'équation du transport de l'énergie cinétique turbulente k et de l'équation du transport de son taux de dissipation ε . Dans un second temps, l'équation (181) est résolue en prenant $K_t = \frac{\nu_t}{Sc_t}$ où ν_t est la viscosité turbulente et Sc_t le nombre de Schmidt turbulent. Le modèle $k-\varepsilon$ est basé sur une relation entre la viscosité turbulente, l'énergie cinétique turbulente et sa dissipation :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \text{ avec } C_\mu = 0,09 \text{ pour le modèle standard.} \quad (182)$$

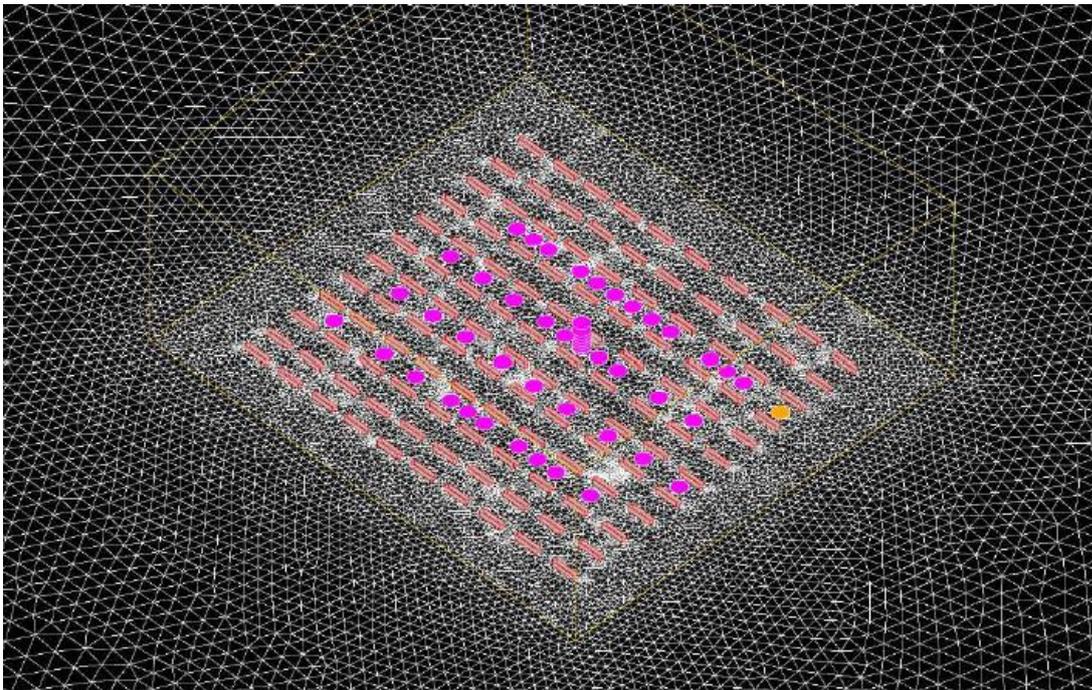


Fig. 31 : Représentation du maillage du domaine expérimental MUST. Le premier sous-domaine est délimité par un rectangle jaune. Les capteurs sont représentés par des cercles roses. La position de la source (cercle jaune) varie selon l'essai.

Pour cette étude, nous avons utilisé le générateur automatique de maillage 3D intégré au logiciel. Le maillage obtenu est représenté figure 31. Il est constitué de deux sous domaines. Le premier, de dimensions $250\text{m} \times 225\text{m} \times 100\text{m}$, est maillé finement et correspond globalement au domaine expérimental réel. Le second, plus étendu et de dimension $800\text{m} \times 800\text{m} \times 100\text{m}$, entoure le premier. Il est maillé plus grossièrement et assure une transition douce entre les bords du domaine et la zone où se situent les containers. Le maillage total, non-structuré, est composé de 2849276 mailles. Il permet d'obtenir à la fois une bonne description des phénomènes physiques et des temps de calcul raisonnables. Les conditions aux limites aux frontières du

domaine rendent compte de l'état de l'atmosphère lors des expériences. Trois types de profils ont été testés sur les frontières latérales avec vent entrant. Les meilleurs résultats ont été obtenus lorsque les profils de vitesse étaient donnés par le modèle de Gryning et al. (2007) et les profils d'énergie cinétique turbulente et de dissipation par le modèle de Yang et al. (2009). L'évaluation qualitative et quantitative de Fluidyn-PANACHE, dans le cas de l'approche directe, est présentée en annexe, paragraphe 10.1.

Avec des modèles analytiques, il est assez simple d'obtenir les fonctions adjointes par discrétisation des solutions du modèle adjoint continu (23) données par les formules (178) ou (179). Il suffit de prendre pour origines les positions des capteurs, d'inverser le sens du vent et de fixer $Q=1$. Avec une approche CFD, le modèle adjoint à résoudre est :

$$\frac{\partial a_i(\mathbf{t}, \mathbf{x})}{\partial(-t)} - \mathbf{U}(\mathbf{t}, \mathbf{x}) \cdot \nabla C(\mathbf{t}, \mathbf{x}) = \nabla \cdot [(D + K_t) \nabla a_i(\mathbf{t}, \mathbf{x})] + \pi_i \quad (183)$$

ce dernier est similaire au modèle direct (181) avec le temps et le vent inversés, les termes décrivant le processus de diffusion inchangés, et le terme source égal à la fonction d'échantillonnage du capteur. Cependant, dans un code de calcul comme Fluidyn-PANACHE, le modèle numérique utilisé pour résoudre l'équation (181) n'est pas exactement l'adjoint du modèle numérique utilisé pour résoudre l'équation (183), voir Hourdin et al. (2006). Il est alors nécessaire de réaliser un test de dualité (Winiarek, 2014) qui vérifie la similitude entre les observations estimées par le modèle direct et par le modèle adjoint approché.

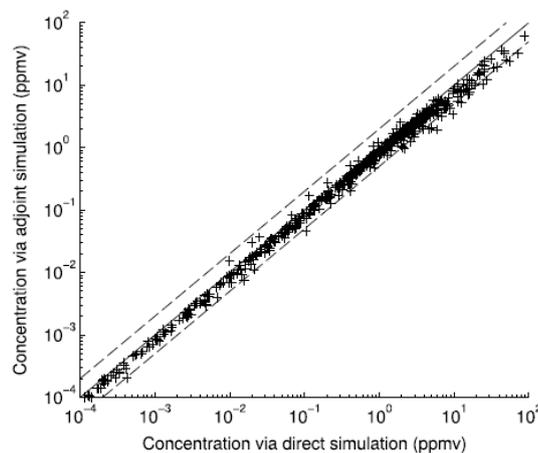


Fig. 32 : Comparaison des observations simulées par le modèle direct (en abscisses) et par le modèle adjoint approché (en ordonnées), pour l'ensemble des essais MUST [A7].

La figure 32 montre que le modèle adjoint numérique défini avec Fluidyn-PANACHE est une bonne approximation du modèle adjoint exact (l'erreur est inférieure à 0,01% dans la majorité des cas). Nous l'avons donc utilisé dans le cadre d'une approche inverse dont nous présentons les résultats détaillés pour 4 cas caractéristiques (cas #2, #10, #15, #16). Les

résultats des autres cas sont regroupés dans le tableau 7. Nous observons que la position de la source qui est la mieux estimée correspond au cas 14, la moins bien au cas 2. Pour ce dernier essai, ainsi que pour le cas 4, les intensités estimées sont également très éloignées de la réalité. Globalement, si l'on exclut ces deux cas, l'erreur d'estimation moyenne est inférieure à 14,6m et le rapport \hat{q}_s / q_s moyen est égal à 1,4.

Trial	m	q_s	\hat{q}_s	E_q	E_t
	($^{\circ}$)	(l/min)	(l/min)	($^{\circ}$)	(m)
1	34	175	160,7±12	0,92	3,3
2	28	200	802±436	4,01	42,9
3	30	200	235±52	1,18	10,8
4	31	200	53±70	0,27	22,8
5	37	200	114±14	0,57	21,9
6	40	200	428±120	2,14	5
7	30	200	264±104	1,32	5,4
8	30	200	77±216	0,39	13,5
9	31	200	305±22	1,53	5,6
10	40	200	216±38	1,08	8,8
11	30	225	376±24	1,67	19,8
12	27	225	212±13	0,94	7,4
13	33	225	218±15	0,97	7,7
14	29	225	319±36	1,42	2,2
15	25	225	430±33	1,91	2,7
16	26	225	388±15	1,723	26,7
17	31	225	202±18	0,9	7,0
18	33	225	226±123	1,01	17,5
19	35	225	396±45	1,76	22,3
20	31	225	183±6,75	0,81	32,1

Tab. 7 : Estimations et erreurs pour les 20 essais retenus

Figure 33, nous avons représenté les fonctions de visibilité du réseau pour les 4 expériences. Les fortes valeurs de $\varphi(\mathbf{x})$ sont en blanc et sont localisées en amont de chaque capteur. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne du réseau, $\varphi(\mathbf{x})$ diminue (couleur grise). Les zones non couvertes sont en noir. Dans tous les cas, la source se trouve dans une région où la visibilité est correcte. Les cartographies des valeurs de $s_{//w} / \max(s_{//w})$ et les régions de confiance à

95% sont représentées figure 34. Les valeurs les plus fortes sont en rouge, les valeurs les plus faibles en bleu. Pour les cas 2 et 10, les zones de fortes valeurs de $s_{//w}$ sont assez étendues, « flat maximum ». A l'inverse, les cas 15 et 16 présentent des « sharp maximum ».

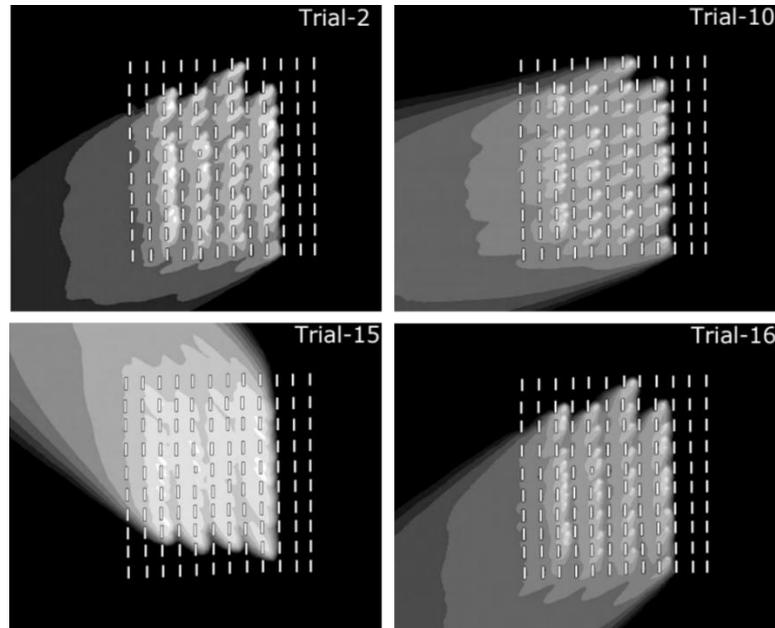


Fig. 33 : Représentation logarithmique de la visibilité $\varphi(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) / dS$ [A7].

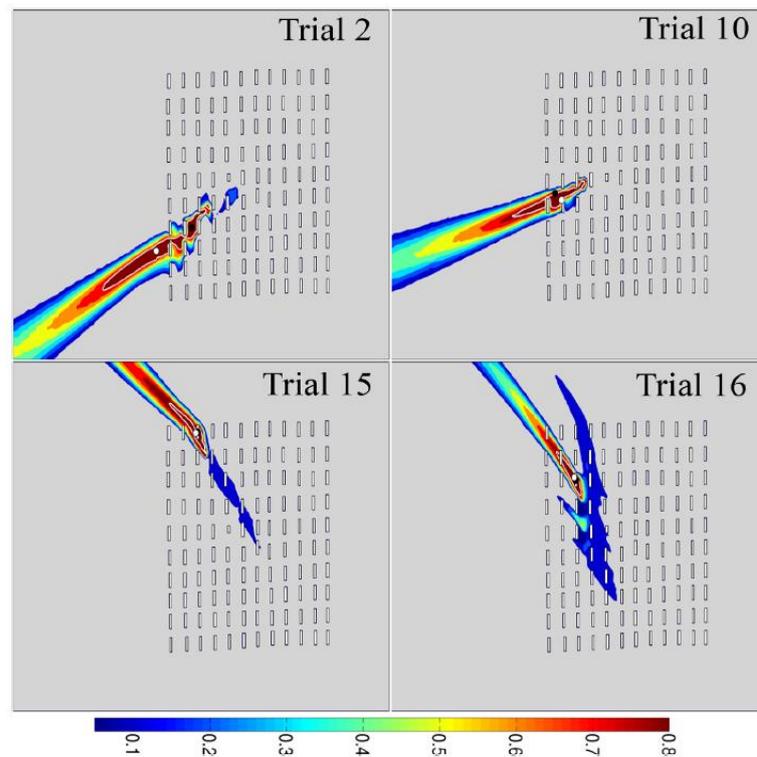


Fig. 34 : Cartographies des valeurs de $s_{//w} / \max(s_{//w})$ & régions de confiance à 95%. La position de la source réelle apparait en noir, la position de la source estimée en blanc [A8].

Tous ces résultats montrent qu'une source ponctuelle de polluant peut être caractérisée (en termes de position et d'émission) dans un environnement urbain, quelles que soient les conditions atmosphériques observées, à partir d'une modélisation CFD (Fluidyn-PANACHE) couplée à la méthode de renormalisation.

6.2 Mise en œuvre opérationnelle

En collaboration avec la PME Fluidyn, dans le cadre du projet DISCARD, nous avons développé le concept d'une plateforme logicielle, représentée figure 35, dont le cœur est constitué par un module basé sur la méthode de renormalisation. Deux modes de fonctionnement ont été prévus : le mode « surveillance continue » et le mode « planification ». Ce dernier a été complété par les travaux réalisés dans le cadre de la thèse d'Hamza Kouichi que j'ai co-encadrée.

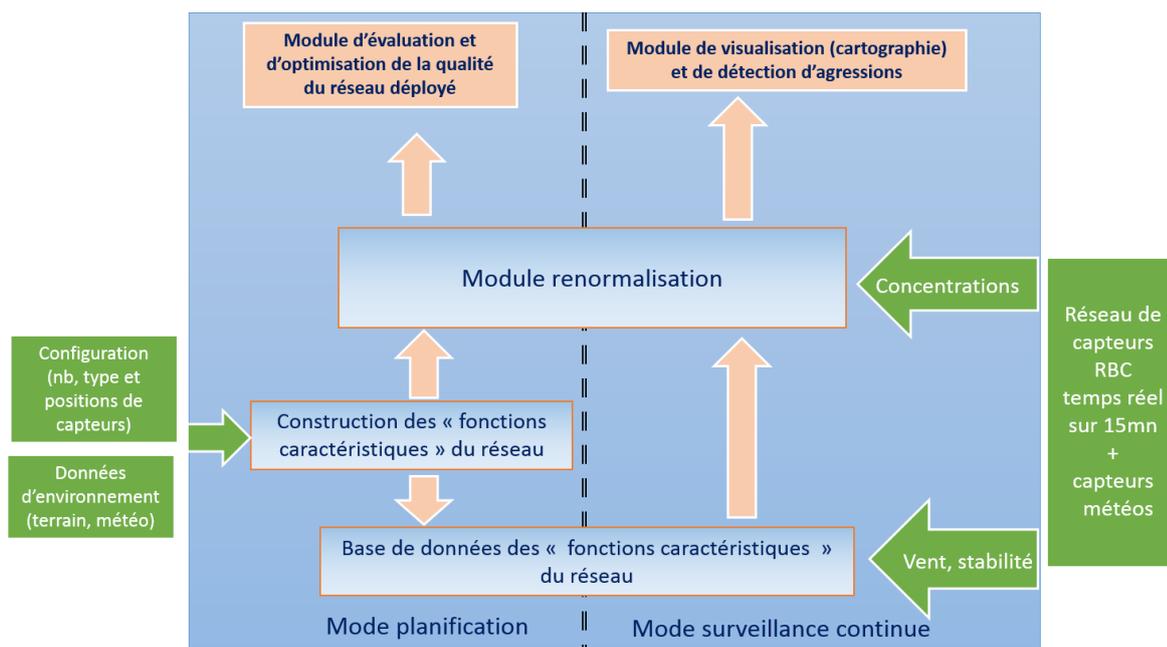


Fig. 35 : Schéma de principe de la plateforme logicielle de protection des zones sensibles

6.2.1 Surveillance continue

Dans le cadre d'une surveillance en continu d'une zone à protéger, le rôle du réseau de capteurs est de mesurer de façon automatique, continue et permanente les concentrations atmosphériques en utilisant du matériel et une méthodologie adaptée aux agents concernés. L'objectif premier est de détecter les contaminations aériennes et donner l'alerte, au plus tôt, afin d'activer les mesures d'urgence (évacuation du site, mise à l'abri et protection des personnels...). C'est la

stratégie dite « detect to warn ». En cas de détection d'une contamination (dépassement des seuils critiques) l'objectif est alors de mettre en œuvre, le plus rapidement possible, les mesures appropriées pour résoudre l'incident (intervention adaptée sur zone, neutralisation de l'attaque...). Pour cela, les données collectées par le réseau de mesures sont traitées par le module « renormalisation » qui localise la source de contamination. Le troisième objectif est de caractériser de façon précise la source de la contamination (quantifier la masse de produit rejetée, identifier la nature du rejet : transitoire ou continu ? etc.) afin de pouvoir alimenter, en données d'entrée, des modèles de dispersion. Le but est alors de reconstruire le champ de concentration afin de déterminer les zones qui ont effectivement été impactées par le rejet ou les sous régions dans lesquelles le champ de concentration a dépassé le seuil critique. Ces modèles servent aussi à établir des prévisions à court terme de l'évolution spatiale et temporelle du champ de concentration (prédire les zones qui seront impactées).

Un objectif opérationnel complémentaire (mais qui n'entre pas dans le cadre de cette étude) est d'identifier les agents pathogènes afin de devancer les effets de la contamination. C'est la stratégie dite du « detect to treat ». Le but est de déclencher, le plus rapidement possible, un processus permettant de traiter les personnes contaminées avant même que les symptômes d'une infection ne se manifestent.

Hormis les vecteurs mesures obtenus en temps réel, les autres éléments nécessaires à l'estimation du terme source peuvent être pré-calculés (et stockés dans une base de données) avant la mise en place, sur site, de la surveillance en continu. En effet, les définitions des fonctions adjointes, de la fonction de visibilité et de la matrice de Gram sont indépendantes des mesures de concentrations. Ainsi, il est possible de calculer ces fonctions et matrices à l'avance, en considérant une large gamme de conditions atmosphériques potentiellement observables sur le site. En temps réel, les données météorologiques mesurées entraînent la sélection des fonctions et matrices correspondantes dans la base de données. Il est donc impératif, afin de disposer de fonctions représentatives, que la base de données soit suffisamment exhaustive pour que l'écart entre la condition météorologique mesurée et la condition disponible dans la base de données soit minimale.

Le réseau de capteurs fournit des lots de mesures de concentration à fréquence régulière et le module « renormalisation », représenté figure 36, calcule la fonction $s_{//\varphi}(\mathbf{x})$ en temps réel. On obtient ainsi une estimation des paramètres de la source de contamination potentielle (localisation et intensité).

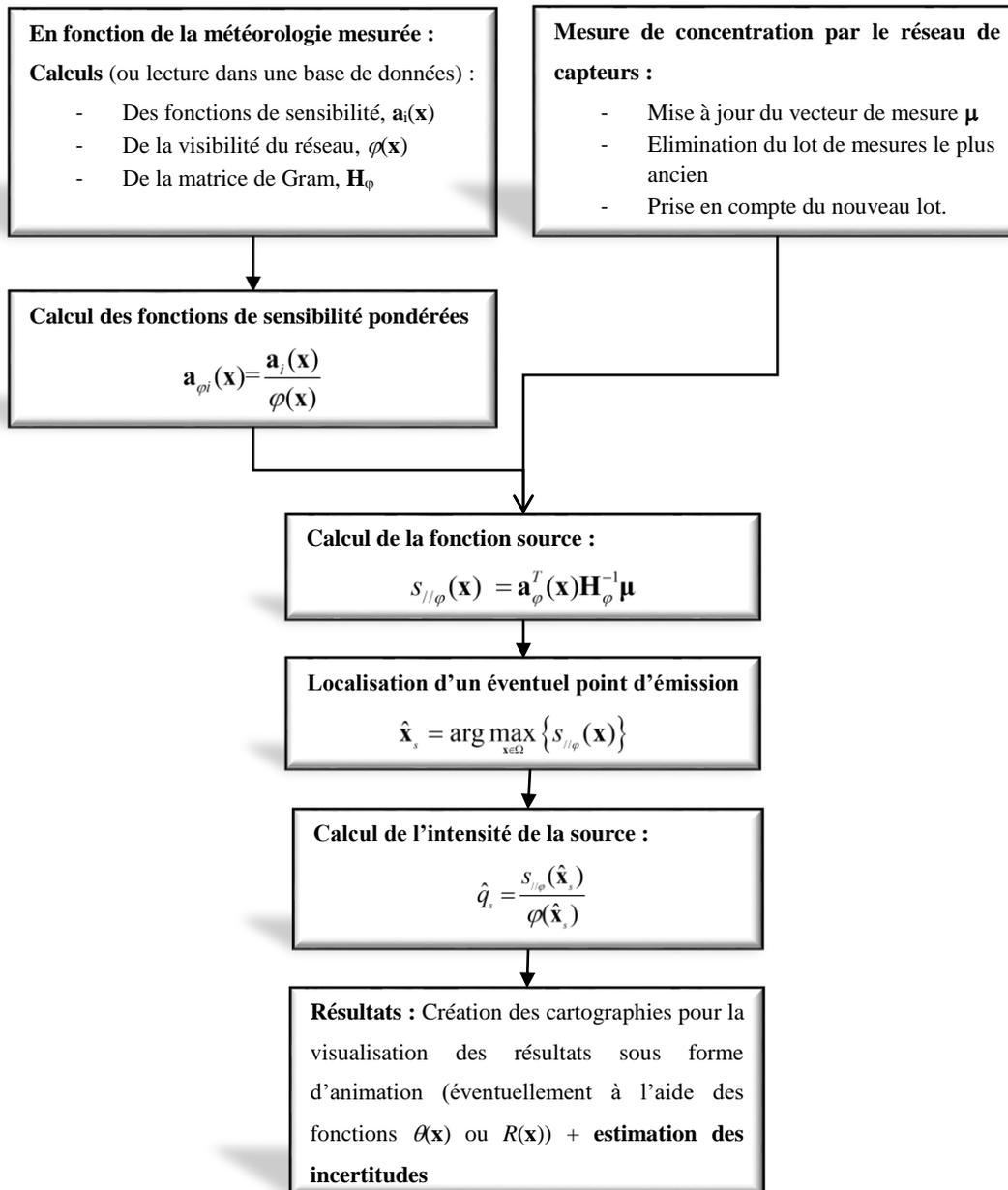


Fig. 36 : Chaîne d'actions pour l'estimation des paramètres d'une source

Dans le cadre du projet DISCARD, une plateforme de démonstration a été développée par la société Fluidyn (toutes les illustrations de ce paragraphe proviennent du rapport de synthèse du lot 4 de ce projet). Le site test retenu, représenté figure 37, est un site industriel réel dans lequel des matières premières pour l'industrie alimentaire (Additifs, arômes alimentaires...) sont produites. L'entreprise est classée Seveso « seuil haut » notamment en raison de sa capacité de stockage de près de 800 tonnes d'ammoniac. A partir d'un modèle numérique de terrain 3D et du code CFD Fluidyn-Panache, une base de données des écoulements atmosphériques sur le site a été construite. Elle regroupe 11 conditions météorologiques (cette base n'avait pas pour

objectif de couvrir l'ensemble des conditions observables sur le site mais de permettre une mise en œuvre rapide du démonstrateur).



Fig. 37 : Vue aérienne du site industriel retenu et localisation des capteurs virtuels.

Le site n'étant pas équipé d'un réseau de surveillance, un réseau virtuel de 20 capteurs a été défini et les fonctions de sensibilité, $\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$, ont été calculées sur une période de 15 minutes pour chaque condition météorologique retenue (hypothèse, assez discutable, de quasi-stationnarité des écoulements atmosphériques sur une période de 15 minutes).

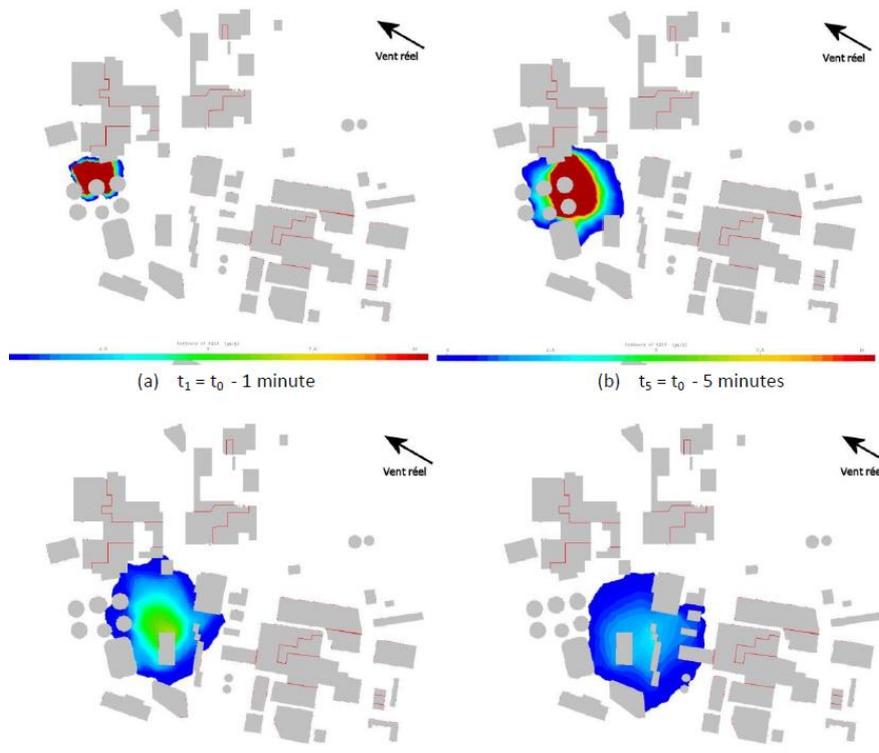


Fig. 38 : Fonction de sensibilité du capteur #3 (t_0 correspond au temps présent).

Ensuite, pour chaque condition météorologique, la fonction de visibilité du réseau, $\varphi(\mathbf{x})$ et la matrice \mathbf{H}_w ont été calculées et stockées dans la base de données.

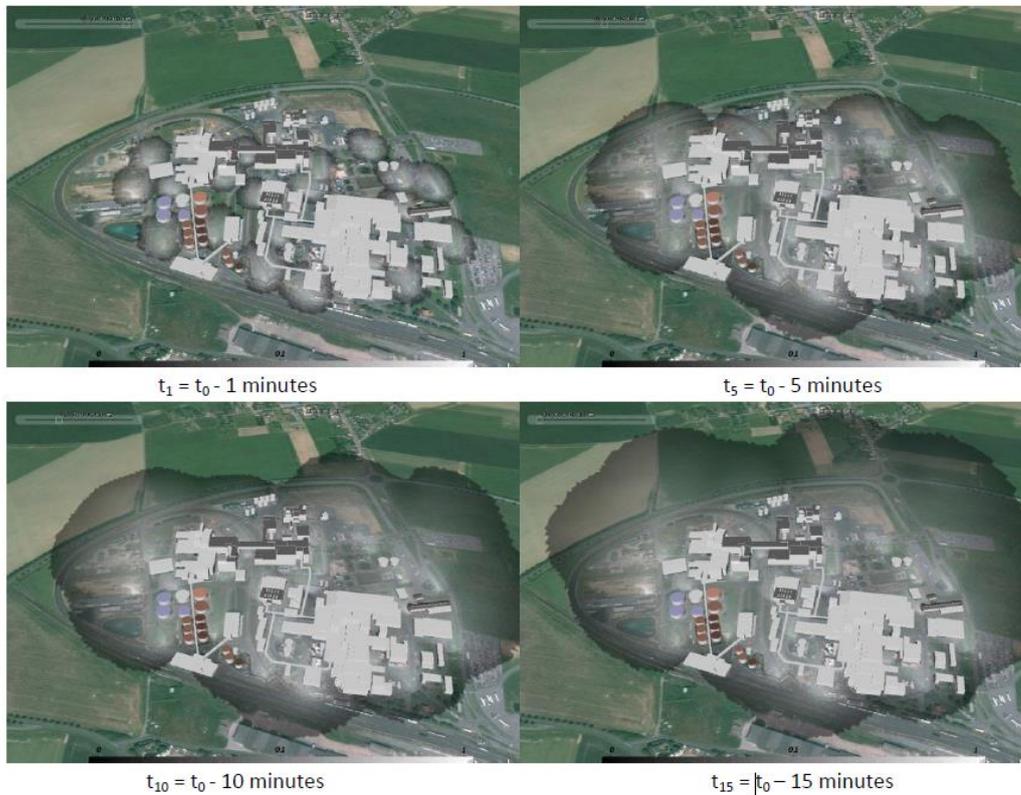


Fig. 39 : Fonction de visibilité du réseau pour la condition météorologique #11 (t_0 correspond au temps présent).

Puis, plusieurs cas de contaminations accidentelles (rejets transitoires, rejets continus, impact partiel ou total du réseau de mesure, etc.) ont été simulés et des vecteurs de mesures synthétiques bruités ont été générés. A l'aide de ces données synthétiques (et des éléments sauvegardés dans la base de données), la plateforme a été testée en situation opérationnelle. Les 20 fonctions de sensibilité stockées ont été échantillonnées à la fréquence d'une minute sur une période de quinze minutes. A chaque échéance un lot de 300 mesures est donc nécessaire pour estimer le positionnement d'une éventuelle source à l'aide de la chaîne d'actions de la figure 36. Les résultats sont présentés sous forme d'animations. La figure 40 présente des extraits d'une telle animation dans le cas d'un rejet transitoire ayant un débit de 15,9 kg/s, 12 minutes avant le déclenchement du processus d'identification.

Pour ce cas standard, le maxima de la fonction $s_{w/w}$ est bien retrouvé 12 minutes avant l'instant présent. La position calculée par la plateforme est représentée par un point rouge figure 40–(b), la source réelle à retrouver est représentée par un point vert. D'un point de vue spatial, on

observe un léger décalage entre la source simulée et la source estimée (5 mètres) ainsi qu'une légère sous-estimation de l'intensité de la source (14.6 kg/s au lieu des 15.9 kg/s simulés).

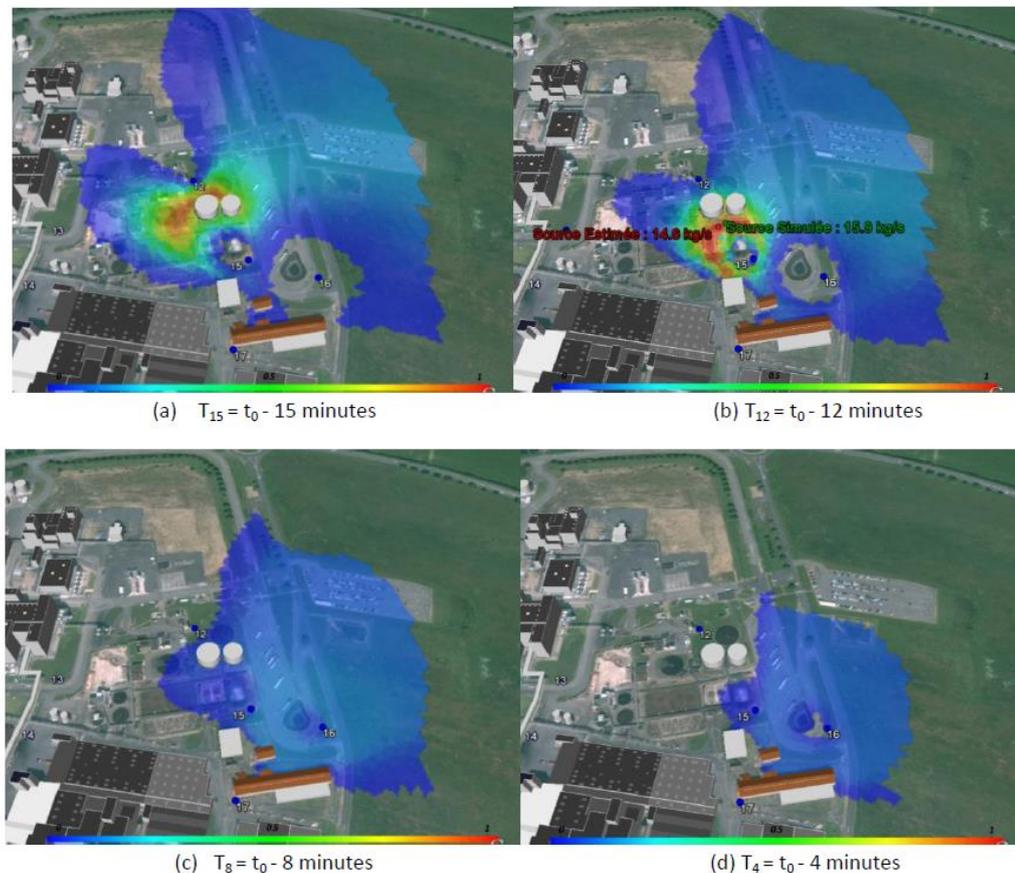


Fig. 40 : Fonction $S_{//w}$ pour une échéance de mesures.

De nombreux autres essais ont été réalisés et montrent que la plateforme obtient des résultats pertinents. Ils montrent aussi qu'un incident réel, en fonction de ses caractéristiques (localisation et intensité), se traduira par :

- le dépassement d'un seuil de concentration critique sur un ou plusieurs capteurs du réseau,
- l'apparition d'une zone clairement identifiable sur les cartographies permettant l'exclusion d'une situation de bruit de fond,
- un maximum absolu de la fonction $s_{//w}$ les cartographies permettant la localisation précise du rejet et le début de l'émission,
- le positionnement de la source estimée hors du site ou en bord de visibilité en cas de source extérieure ou de bruit de fond provenant d'une activité lointaine,
- une estimation de l'intensité de la source identifiée.

6.2.2 Planification

Il est également utile pour les industriels, les autorités civiles ou militaires, de disposer d'outils d'aide à la conception (ou à l'évaluation de l'efficacité) de réseaux de surveillance (Abida et al. 2008). Ce type d'outils permet la création de nouveaux réseaux ou la modification de réseaux déjà existants (déplacement, ajout ou suppression de capteurs). Ces outils peuvent également être utilisés pour définir des stratégies de déploiement de réseaux mobiles (c'est-à-dire dans lesquels les capteurs peuvent changer de positions en fonction des conditions rencontrées). Les réseaux qui nous intéressent ici sont les réseaux dont l'objectif est de localiser (en espace et en temps) et/ou caractériser (quantifier le débit, le type d'émission – continue / transitoire) une source d'émission à partir de mesures de concentrations atmosphériques. Le « mode planification » de la chaîne logicielle, décrit figure 35, est basé sur le module « renormalisation » et permet d'évaluer et/ou de concevoir des réseaux de surveillance de ce type. Ci-après, j'ai adapté une partie des résultats obtenus dans le cadre d'une thèse de doctorat que j'ai co-encadrée [C18] à l'utilisation prévue.

Etapes préalables

Tout en restant très général, nous pouvons identifier quatre étapes préalables à la conception (et/ou à l'évaluation) d'un réseau de surveillance. La première est la définition des agents pathogènes surveillés (espèces chimiques, biologiques, particules...) et des technologies permettant de mesurer leur concentration dans l'air. La deuxième est la définition précise de la zone à protéger et de la zone à l'intérieure de laquelle les capteurs peuvent être déployés. La troisième est la définition des positions potentielles des capteurs. Ces positions peuvent être choisies intuitivement ou en fonction d'exigences techniques (les détecteurs doivent être placés en hauteur...), pratiques (les détecteurs ne doivent pas être accessibles par le public...) ou légales (peut-on installer un détecteur sur le toit d'un bâtiment public ?). La quatrième concerne l'étude des conditions météorologiques potentiellement observables sur le site, à partir desquelles les fonctions caractéristiques du réseau (fonctions adjointes, fonction de visibilité) sont calculées. Il faut noter que toutes les informations recueillies au cours de ces études préalables sont également celles nécessaires à la construction de la base de données utilisée en mode opérationnel.

Evaluation des performances d'un réseau

La configuration spatiale d'un réseau, constitué de m capteurs, est notée $O = \{\mathbf{o}_1, \dots, \mathbf{o}_m\}$ où \mathbf{o}_i désigne l'emplacement du $i^{\text{ème}}$ capteur. Pour évaluer la qualité d'une configuration donnée, il faut d'abord définir clairement l'objectif du réseau, puis traduire cet objectif, souvent informel,

sous forme d'une fonction mathématique $F(O)$ à minimiser. Par exemple, un premier objectif qui peut être visé est celui de la « bonne couverture spatiale ». Conformément à ce que nous avons déjà expliqué au paragraphe 3.5, une zone « couverte » (ou « vue ») par un réseau, pour des conditions météorologiques données, est une zone à partir de laquelle un éventuel rejet, dont le débit serait égal à Q unité de masse par seconde (Q u/s), est capable de déclencher au moins une mesure non nulle. On considère que tous les capteurs sont identiques et on note C_{\min} leur limite de sensibilité (concentration minimale détectable). Les zones pour lesquelles $a_i(\mathbf{x}) \geq C_{\min} / Q$ sont les zones dites « couvertes ». Si le domaine spatial est discrétisé, en n mailles identiques, la matrice de sensibilité \mathbf{A} , de taille $m \times n$, peut être utilisée pour définir, de façon binaire, une matrice de couverture \mathbf{M} , également de taille $m \times n$:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } A_{ij} \geq C_{\min} / Q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (184)$$

Un point de coordonnées \mathbf{x}_j est couvert par le réseau si

$$\psi(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^m M_{ij} \geq 1 \quad (185)$$

Avec cette définition, on remarque que $\psi(\mathbf{x}_j)$ représente aussi le nombre de capteurs « sensibles » au point \mathbf{x}_j . Le nombre total de mesures non nulles, potentiellement réalisables par le réseau, est donc :

$$\psi_{total}(O) = \sum_{j=1}^n \psi(\mathbf{x}_j) \quad (186)$$

On peut également définir le pourcentage de points non-couverts par le réseau

$$n_c(O) = 100 - \frac{\sum_{j=1}^n \max_i \{M_{ij}\}}{n} \times 100 \quad (187)$$

$F_1(O) = n_c(O)$ a été le premier critère que nous avons retenu pour caractériser les performances de réseaux en terme de couverture. Un deuxième critère que nous avons utilisé était basé sur la notion de visibilité. En effet, nous avons montré, au paragraphe 3.5, qu'un réseau était entièrement caractérisé par sa fonction de visibilité et donc par sa matrice $\mathbf{H}_\varphi(O)$. De plus, nous avons montré que le déterminant de cette matrice était lié à la notion d'entropie. Cette notion désigne également l'inverse de l'information. La quantité $-\Delta S_\varphi = Cte + \frac{1}{2} \log(\det \mathbf{H}_\varphi(O))$, issue de l'équation (63), représente donc la quantité d'information moyenne attendue du réseau

avec la configuration O . Compte tenu du fait que \log est croissant, maximiser cette info revient à maximiser $\det[\mathbf{H}_\varphi(O)]$ ou à minimiser

$$F_2(O) = -\det[\mathbf{H}_\varphi(O)] \quad (188)$$

Un dernier critère que nous avons utilisé est basé sur la notion de « part de la norme expliquée par le modèle » $R(\mathbf{x})$ définie au paragraphe 5.3. Pour une configuration donnée O , cette fonction mesure, en chaque point du domaine, la capacité du modèle à expliquer la mesure. Ainsi, la fonction $R_{\max}(O) = \max_{\mathbf{x}} R(\mathbf{x})$ est un bon indicateur de performance et peut être utilisé comme critère d'évaluation (par convention, F étant une fonction à minimiser, nous avons ajouté un signe -):

$$F_3(O) = -R_{\max}(O) \quad (189)$$

Notons que, sur un site donné, les conditions météorologiques varient et ne sont, généralement, connues que sous forme de roses des vents qui indiquent, pour différentes vitesses, la fréquence relative, f_k , de chaque direction de vent (l'horizon étant généralement divisé en 12 secteurs de 30 degrés, $k = 1, \dots, 12$). Pour prendre en compte cette variabilité, nous pouvons utiliser un critère moyen

$$\bar{F}(O) = \sum_{k=1}^{12} f_k F(O) \quad (190)$$

Notons que ce critère peut être modifié afin de prendre également en compte la variabilité de la vitesse.

Conception optimale d'un réseau de mesures

Il est important de rappeler que, lorsqu'on conçoit un réseau de mesure, les emplacements possibles pour les détecteurs (déterminés par une étude préliminaire spécifique) sont généralement en nombre fini p (contraintes techniques, réglementaires...). Le processus de conception optimale d'un réseau consiste donc à déterminer la configuration spatiale la plus « performante », parmi un ensemble fini de configurations possibles. On note $\Omega_p = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$ l'ensemble des p emplacements potentiels pour les capteurs. En utilisant comme fonctions coût un des critères définis précédemment, le problème peut être formulé comme un problème d'optimisation combinatoire : trouver parmi toutes les configurations possibles celle, notée O^* , qui minimise $F(O)$:

$$O^* = \arg \min_{O \in \Omega_p} \{F(O)\} \quad (191)$$

Notons que le nombre de capteurs, m , est ici imposé, mais il peut également être une variable du problème. A priori, trouver une configuration optimale parmi un ensemble fini de configurations possibles est un problème simple : il suffit de tester toutes les configurations et de les comparer les unes aux autres pour extraire la meilleure. Mais, en pratique, le nombre de configurations possible (C_m^p) est trop important et une telle étude s'avère impossible. Pour résoudre ce problème, on trouve dans la littérature plusieurs algorithmes (dit métaheuristiques, voir Blum & Roli, (2003) basés sur une recherche itérative et qui fournissent des solutions de bonnes qualités (et optimales dans les meilleurs cas) tout en étant relativement simples à mettre en œuvre. L'algorithme que nous avons retenu est celui dit du « recuit simulé » (Simulated Annealing, SA, en anglais). Cet algorithme, proposé par Kirkpatrick et al. (1983), s'inspire de la technique du « recuit » utilisée par les métallurgistes pour obtenir un état solide « bien ordonné, d'énergie minimale » (Siarry, 2014). La méthode du « recuit simulé » transpose ce procédé à la résolution d'un problème d'optimisation : la fonction objectif est assimilée à l'énergie du matériau et le système (dans notre cas la configuration du réseau, O) est amené itérativement vers un état d'énergie minimale. A chaque itération, la configuration O_i est transformée en une configuration O_j . Si cette transformation a pour effet de diminuer la fonction objectif, ($F(O_j) - F(O_i) \leq 0$) alors O_j est conservée. Si, au contraire, elle provoque une augmentation de la fonction objectif, O_j peut être tout de même retenue, mais avec une probabilité basée sur la distribution de Boltzmann pour une température fictive, T . On fait décroître cette température au cours des itérations afin d'assurer la convergence.

Nous avons appliqué cette approche afin de déterminer quelle aurait été la meilleure configuration de réseau dans le cadre des expériences DYCE. Pour cela, les 27 positions de capteurs représentées sur la figure 19 ont été utilisées pour construire Ω_p , l'ensemble des positions possibles. Notre but était donc de trouver, parmi les $C_{27}^4 = 17550$ configurations possibles, celle qui minimise $F(O) = -R_{\max}(O)$. La figure 41-b montre l'évolution de la fonction coût et de la température fictive T au cours des itérations. Au début, T est élevée et F oscille fortement. Après 2000 itérations, les oscillations cessent et la solution converge, après 3200 itérations, vers la solution présentée figure 41-a. Ce résultat confirme ceux du paragraphe 6.1 : les meilleures configurations sont celles « en ligne », situées proches de la source.

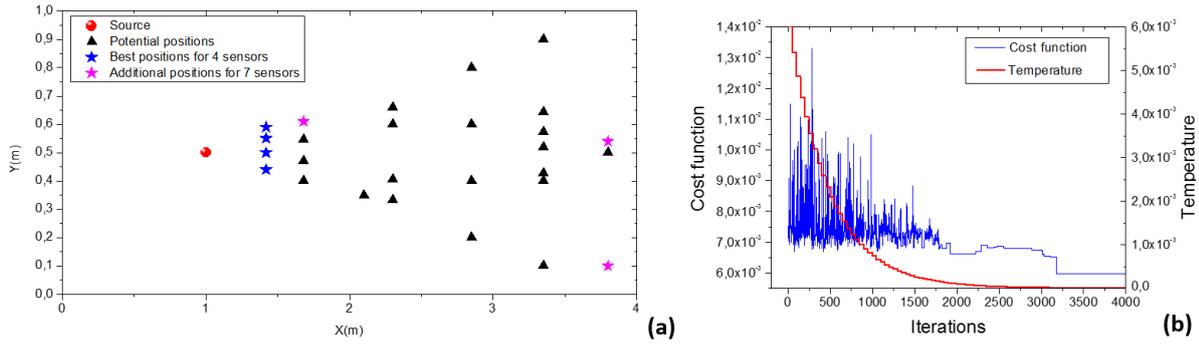


Fig. 41 : (a) Ensemble des positions possibles et réseaux optimaux. (b) Evolution de la fonction coût et de la température fictive avec l'algorithme du recuit simulé.

Nous avons également déterminé les meilleures configurations constituées de $m=3, \dots, 10$ capteurs. Notons que toutes ces configurations (pour $m > 5$) contiennent la configuration optimale de 4 capteurs. Sur la figure 41-a, nous avons également représenté la meilleure configuration de 7 capteurs. Puis nous avons calculé, pour chacune de ces configurations optimales, l'erreur relative de localisation longitudinale ($Er_x = |x_s - x_0| / X_m$) et l'erreur relative d'intensité (Er_q), voir figure 42. Nous voyons que, pour chacune de ces configurations, les erreurs sont extrêmement faibles et varient peu. Cependant, on observe une diminution de l'erreur de localisation, et de l'incertitude associée, lorsque le nombre de capteurs passe de 4 à 5. L'incertitude est minimale pour le réseau constitué de 7 capteurs.

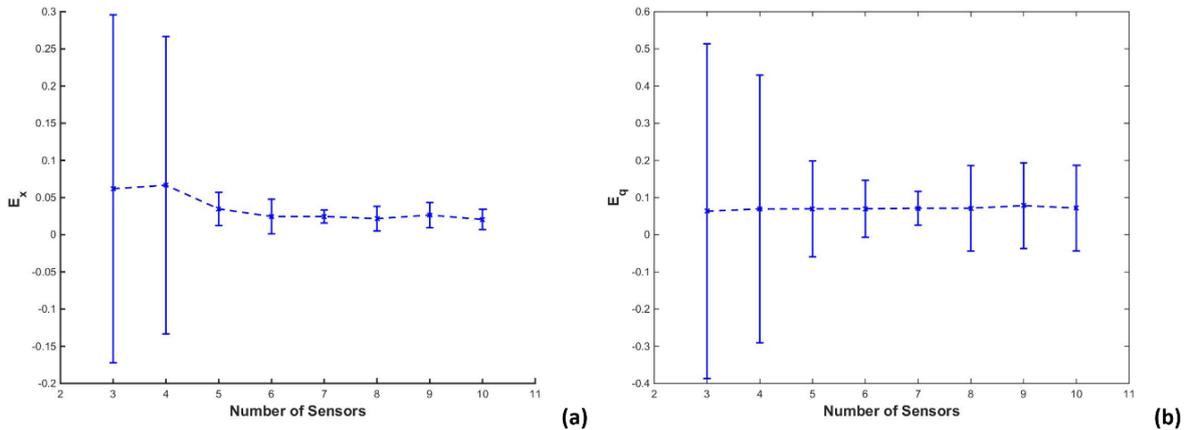


Fig. 42 : (a) Erreurs relatives de localisation longitudinale et (b) erreur relative d'intensité pour les réseaux optimaux constitués de 3, ..., 10 capteurs. Les intervalles de confiance à 95% sont représentés sous la forme de barres d'erreurs.

6.3 Bilan de la section

Dans cette section nous avons évalué l'efficacité des méthodes et algorithmes présentés dans les sections précédentes. Nous les avons testés dans des conditions similaires à leur utilisation opérationnelle, c'est-à-dire en champ proche ( chelle locale) sur des zones peu vallonnées, avec ou sans obstacles. Pour clea, nous avons utilisé les expériences DYCE, FFT07 et MUST.

Avec les deux premières, pour calculer les r tropanaches, nous avons utilisé des modèles de dispersion analytiques. Avec la troisième, nous avons utilisé un modèle issu de la Mécanique des Fluides Numérique (CFD), Fluidyn-PANACHE. Dans tous les cas, nous avons obtenu des résultats au moins similaires à ceux publiés dans la littérature. Tous les résultats obtenus mettent en évidence l'efficacité de la méthode, qu'elle soit couplée avec des modèles de dispersion analytiques ou avec des modèles CFD. Ainsi, il est possible d'estimer à la fois la position et l'intensité d'une source continue ponctuelle lorsque la dispersion a lieu sur des terrains plats homogènes ou sur des terrains plus complexes, faiblement urbanisé.

Nous avons ensuite montré que la méthode de renormalisation pouvait être placée au cœur d'une plateforme logicielle de traitement de données. Cette plateforme peut être exploitée (i) en mode « surveillance continue » ou (ii) en mode « planification ». Dans le premier cas, elle permet de surveiller des sites sensibles afin de détecter d'éventuels rejets volontaires ou accidentels. Pour cela, elle fournit des cartographies continûment mises à jour de sources potentielles dans l'environnement proche des sites surveillés. A partir de ces cartes, les anomalies observées sur les signaux sont aisément identifiées, qualifiées et éventuellement associées à des rejets aériens. Dans le second cas, elle permet d'évaluer l'efficacité de réseaux de surveillance existants, de les modifier (déplacement, ajout ou suppression de capteurs) ou d'en concevoir de nouveaux. Elle peut également être utilisée pour définir des stratégies de déploiement de réseaux mobiles. Une plateforme de démonstration a été développée dans le cadre du projet DISCARD. Cette dernière constitue une première base prometteuse dans le cadre de la surveillance continue de sites sensibles.

7. APPLICATION AU PROBLEME INVERSE NEURO- ELECTRIQUE

7.1 Contexte scientifique et médical

7.1.1 *De la physique atmosphérique aux neurosciences*

Lorsque j'ai commencé à travailler sur la méthode de renormalisation, je me suis rapidement aperçu que son domaine d'application était assez large et pas uniquement limité à la physique atmosphérique. En particulier, en étudiant les travaux de Grave de Peralta et al. (1999, 2009), j'ai compris qu'elle pouvait être utilisée pour résoudre le « Neuroelectromagnetic Inverse Problem – NIP » qui consiste, à partir des signaux électro-encéphalographiques (EEG), à déterminer la répartition spatio-temporelle des courants qui en sont la cause à l'intérieur du cerveau. D'abord avec la DGA (J.P. Issartel, X. Busch), puis avec l'aide de l'Institut de Recherche Biomédicale des Armées (IRBA) nous avons adapté la méthode à ce domaine.

7.1.2 *Intérêt pour les neurosciences*

Pour observer et localiser l'activité cérébrale de façon non invasive, on dispose aujourd'hui de plusieurs techniques (dites « d'imagerie cérébrale fonctionnelle ») efficaces.

- Les premières sont basées sur l'imagerie radiologique (IRM fonctionnelle, PET Scan...) : dans le cas de l'IRMf, on mesure des variations de débit sanguin liées à l'oxygénation des neurones actifs, pour le PET il s'agit de visualiser un traceur radioactif qui se concentre dans les zones actives du cerveau. Ces techniques possèdent une haute résolution spatiale mais une faible résolution temporelle. De plus, elles imposent d'importantes contraintes techniques (matériel encombrant, injection d'un traceur, position allongée immobile du sujet...) et des coûts plutôt élevés.
- Les secondes utilisent des signaux captés en magnétoencéphalographie (MEG) ou en électro-encéphalographie (EEG). En MEG, on mesure les champs magnétiques produits par l'activité électromagnétique du cerveau tandis qu'en EEG, on mesure, à l'aide d'un ensemble d'électrodes placées sur le cuir chevelu, des différences de potentiel (ddp) électriques. Ces techniques, contrairement à l'imagerie radiologique, possèdent une bonne résolution temporelle. De plus l'EEG est une technique facilement accessible et peu coûteuse (mais ce n'est pas le cas de la MEG qui doit être réalisée dans une chambre

blindée afin de ne pas être parasitée par les champs magnétiques de l'environnement extérieur).

Cependant, pour appréhender le fonctionnement interne du cerveau à partir des signaux mesurés en MEG ou EEG, il est nécessaire de résoudre un problème inverse (Neuroelectromagnetic Inverse Problem, NIP) : à partir des signaux MEG/EEG mesurés, il s'agit de déterminer la répartition spatio-temporelle des courants qui en sont la cause. Ce problème est difficile à résoudre car : (i) il est, d'un point de vue mathématique, mal posé (c'est-à-dire que la solution n'est pas unique, plusieurs champs de courant peuvent être compatibles avec les mêmes enregistrements MEG/EEG). Il nécessite donc l'utilisation d'algorithmes complexes, souvent lourds et longs à mettre en œuvre, (ii) les signaux venant des zones assez profondes du cerveau sont très atténués (et bruités) et l'EEG les détecte difficilement (ce qui n'est pas le cas de la MEG). Aussi des sources peu profondes peuvent être privilégiées par les algorithmes de reconstruction basés sur l'EEG, (iii) les courants électriques qui circulent à l'intérieur du cerveau, à un moment donné, sont généralement diffus, mais peuvent être, pour certains processus, très localisés (sources quasi-ponctuelles). Les algorithmes de reconstruction doivent être efficaces dans les deux cas.

7.1.3 Objectif visé

En collaboration avec l'Institut de Recherche Biomédicale des Armées -IRBA- (Marie-Hélène Ferrer, François Vialatte) et avec le soutien de la SATT Paris-Saclay (projet RECREER,), nous avons décidé d'adapter la méthode de renormalisation pour résoudre le problème inverse neuro-électrique. L'objectif final du projet est de développer une chaîne logicielle, dont le « cœur » sera constitué par un module basé sur la méthode de renormalisation (le concept est représenté figure 43).

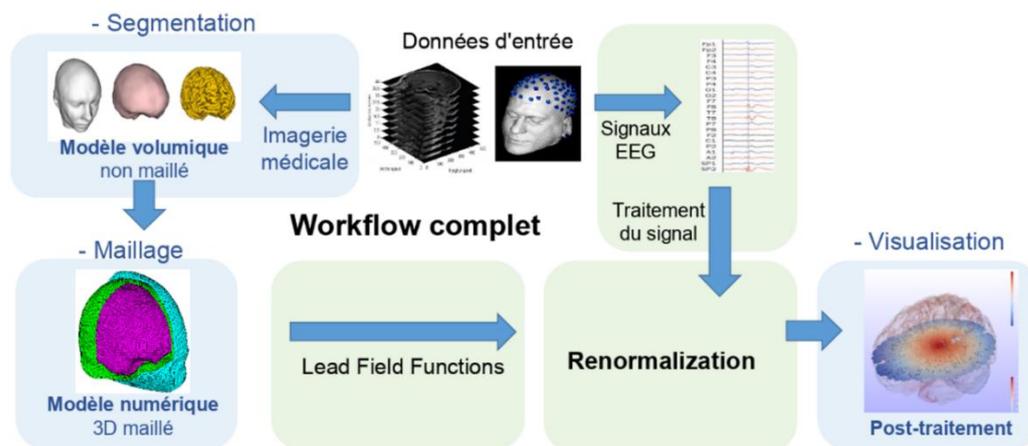


Fig. 43 : Réalisation de la chaîne numérique : de l'imagerie médicale au post-traitement des résultats

Cet outil doit permettre de suivre, en temps quasi-réel et à partir de signaux captés en EEG, le déroulement d'un processus cérébral. Il doit être capable de produire des cartographies dynamiques de l'activité électrique cérébrale. Nos partenaires de l'IRBA nous ont permis d'identifier plusieurs domaines dans lesquels la méthode pourrait être utilisée :

- En neuropsychologie, pour le diagnostic de troubles psycho-cognitifs. En effet, certaines victimes de traumatisme cranio-cérébral présentent des séquelles cognitives, comportementales et psychoaffectives sans que les diagnostics cliniques disponibles permettent de détecter et d'objectiver les lésions cérébrales correspondantes. Cependant, les patients présentent de véritables troubles cognitifs et comportementaux qui les empêchent de reprendre normalement le cours de leur vie. La méthode développée ici pourrait aider le clinicien à identifier d'éventuelles modifications des activations cérébrales caractéristiques des états observés. De façon plus générale, la méthode pourrait permettre de réaliser des cartographies dynamiques du fonctionnement cérébral. Outre l'intérêt scientifique évident d'une telle approche pour l'étude du cerveau, cela permettrait de comprendre la réorganisation fonctionnelle cérébrale de patients ayant eu une lésion d'une zone du cerveau associée à une certaine activité mentale.
- En neurofeedback EEG. Le neurofeedback est un procédé qui permet à un individu d'apprendre à modifier son activité cérébrale dans le but d'améliorer sa santé et ses performances. Basée sur l'utilisation de l'EEG, cette technique pourrait être complétée par une visualisation dynamique de l'activité cérébrale du patient.
- En neurologie, notamment pour le traitement de l'épilepsie. En cas d'épilepsie focale, c'est-à-dire quand le foyer est localisé, on peut l'ôter par la chirurgie. Les praticiens ont besoin d'outils de diagnostic de hautes résolutions qui améliorent la précision des interventions chirurgicales. Notre méthode doit permettre d'obtenir des images en haute résolution du cerveau et, de cette manière, permettre la localisation précise de la source de l'activité épileptique.

Les premiers utilisateurs seront les médecins chercheurs du département NCO de l'IRBA, constitué d'une unité Fatigue-Vigilance et d'une unité Neurophysiologie du Stress (NPS). Ces unités utilisent l'EEG pour évaluer l'impact de contraintes externes ou internes à l'être humain susceptibles d'altérer la dynamique du fonctionnement cérébral. L'unité NPS recherche aussi de nouveaux indicateurs pour le diagnostic et le suivi de traumatismes crâniens et de syndromes de stress post-traumatique constituant un « Handicap Invisible ». Afin d'appliquer la méthode

de renormalisation, nous avons dû, dans un premier temps, comprendre la façon dont l'activité électrique du cerveau était modélisée, puis, dans un second temps, réaliser les ajustements théoriques nécessaires son utilisation. C'est ce travail qui est présentée dans les paragraphes suivants.

7.2 Modélisation de l'activité électrique du cerveau

7.2.1 Une approche macroscopique

L'EEG consiste à mesurer des potentiels électriques, sur la surface de la tête (cuir chevelu), à l'aide d'électrodes. Ces potentiels résultent d'une activité électrique à l'intérieur du cerveau. Le cerveau est un organe (dont le poids, chez l'adulte, dépasse largement le kilo) qui contient approximativement 100 milliards de cellules nerveuses (neurones). Les neurones du cortex cérébral (couche externe des hémisphères cérébraux qui contient la substance grise) et en particulier les neurones dits « pyramidaux », sont les principaux responsables de l'activité électrique enregistrée par l'EEG.

En effet, lorsqu'un neurone est sollicité, des changements transitoires du potentiel de sa membrane provoquent des mouvements de charges ioniques le long de son axe principal. Ces mouvements sont appelés « courants primaires ». Le déséquilibre électrique qu'ils engendrent sollicite également des charges localisées dans le volume environnant le neurone. Ces dernières participent à la création de courants de conduction, appelés « courants secondaires » (quantitativement, la somme des courants secondaires doit correspondre au courant primaire). Cependant, à l'échelle d'un seul neurone, les courants sont très faibles et ne sont pas mesurables en pratique. Pour qu'une activité électrique soit mesurée au niveau du cuir chevelu, il est nécessaire que des milliers de neurones soient:

- orientés dans une direction donnée,
- activés de façon synchrone.

De tels groupes de neurones « organisés » sont appelés macro-colonnes. Grâce à leur orientation spatiale (parallèlement les uns par rapport aux autres et perpendiculairement à la surface corticale), les neurones pyramidaux forment des colonnes capables de générer une activité électrique mesurable à la surface du crâne par l'EEG. Pour modéliser cette activité, l'idée est donc de se placer à l'échelle de la macro-colonne plutôt qu'à celle du neurone individuel. On considère donc ici que l'activité électrique cérébrale globale résulte de l'activation, en différentes régions du cerveau, de différentes macro-colonnes de neurones.

7.2.2 Equations de l'électromagnétisme

Le courant généré dans le cerveau est exprimé sous la forme d'une densité de courant (A/m^2), notée $\mathbf{j}(\mathbf{x})$. Cette densité se décompose sous la forme :

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}^p(\mathbf{x}) + \mathbf{j}^s(\mathbf{x}) \quad (192)$$

- \mathbf{j}^p est la résultante des courants primaires générés par l'ensemble des macro-colonnes de neurones.
- \mathbf{j}^s est la résultante des courants secondaires. La relation entre cette densité et le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ en (en Volts par mètre, V/m) est donné par la loi d'Ohm locale :

$$\mathbf{j}^s(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (193)$$

où $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ est le tenseur de conductivité.

Notons que, pour arriver jusqu'aux électrodes, le courant doit traverser les tissus cérébraux, le liquide céphalo-rachidien, la boîte crânienne et la peau. Il est donc nécessaire de connaître les conductivités de tous ces milieux. Il existe une grande diversité de valeurs de publiées dans la littérature. Cependant, en première approximation, on peut considérer que :

- La tête (qui occupe un volume noté D) est constituée de trois milieux isotropes, chacun de conductivité homogène (exprimée en $\Omega^{-1}m^{-1}$) : la peau (cuir chevelu), l'os crânien et les tissus cérébraux.
- La conductivité de l'os du crâne est beaucoup plus faible que celle des autres tissus (on trouve, approximativement, un rapport 1/80 entre la conductivité de l'os et celle de la peau ou du cortex).

Afin de relier le potentiel électrique, la conductivité du milieu et les densités de courants, Grave de Peralta Menendez et al. (2004) rappellent que l'on peut considérer que la transmission des phénomènes électriques est instantanée et décrite par l'approximation quasi-statique des équations de Maxwell. Premièrement, la loi de Maxwell-Faraday dit que le champ électrique est irrotationnel

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (194)$$

\mathbf{E} dérive donc d'un potentiel électrique scalaire U (V), soit :

$$\mathbf{E} = -\nabla U \quad (195)$$

Deuxièmement, l'équation de Maxwell-Ampère, exprime une relation entre la circulation du champ magnétique \mathbf{B} (en T) et la densité de courant

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{j} \quad (196)$$

où μ (en T.m.A⁻¹) est la perméabilité magnétique du vide. En prenant la divergence de cette équation $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0 = \mu \nabla \cdot \mathbf{j}$ et en remplaçant \mathbf{j} par son expression donnée par (192) et (193), on obtient :

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot (\mathbf{j}^p + \mathbf{j}^s) = \nabla \cdot (\mathbf{j}^p + \sigma \mathbf{E}) = 0 \quad (197)$$

soit

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla U) = \nabla \cdot \mathbf{j}^p \text{ dans } D \quad (198)$$

où $\nabla \cdot \mathbf{j}^p$ est exprimée en A/m³. Pour compléter cette équation de Poisson, il convient de lui adjoindre, sur la totalité de la frontière ∂D (c'est-à-dire sur le cuir chevelu) dotée d'une normale unitaire extérieure \mathbf{n} , la condition aux limites :

$$\sigma \nabla U \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial D \quad (199)$$

Connaissant la distribution des courant primaires et la conductivité en tout point du volume cérébral, l'équation (198) associée à la condition aux limites (199) permet de calculer le potentiel en tout point du volume cérébral (et donc sur les électrodes). De façon symbolique, nous pouvons représenter ce système d'équations sous la forme d'un opérateur linéaire :

$$\mathcal{L}(U) = \mathbf{j}^p \quad (200)$$

7.2.3 Modèle de dipôle

Au niveau macroscopique, la densité de courant primaire générée par une colonne de neurones, localisée en \mathbf{x}_s , peut être modélisée par un « dipôle équivalent » ponctuel (Heller & Volegov, 2014) :

$$\mathbf{j}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \quad (201)$$

où \mathbf{q}_s est le moment du dipôle tel que $\mathbf{q}_s = \int_D \mathbf{j}^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. On note $q_s = \|\mathbf{q}_s\|$ son intensité et

$\mathbf{d}_s = \frac{\mathbf{q}_s}{q_s}$ sa direction. Ainsi, dans le cas d'une source ponctuelle le terme de droite de l'équation

(198), devient

$$\nabla \cdot \mathbf{j}^p(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\mathbf{q}_s \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)) \quad (202)$$

7.2.4 Vecteur de mesure

L'EEG mesure l'activité électrique à la surface du cuir chevelu à l'aide de $m+1$ électrodes. Comme le potentiel est défini à une constante près, on calcule, à partir des $m+1$ potentiels relevés sur les électrodes, m différences de potentiel (DDP), par exemple en assignant le rôle

de référence à l'une quelconque des électrodes. On dispose donc, avec ces DDP, de seulement m informations pertinentes soit, avec un léger abus de langage, m mesures. Le nombre total d'électrodes varie généralement entre 21 (les électrodes sont alors placées en suivant une nomenclature internationale standardisée appelée « système 10/20 ») et 128 (« système 10/5 »). Le système international 10/20 de placement des électrodes est le système le plus couramment utilisé. Il garantit que l'espace inter-électrode est identique et assure un placement des électrodes proportionnel à la forme et la taille du crâne. Les chiffres 10 et 20 dénotent le fait que la distance entre deux électrodes adjacentes est de 10 à 20% de la distance totale soit entre le devant et le derrière de la tête ou entre le côté gauche et le côté droit (voir figure 44). Les 21 électrodes posées sur le cuir chevelu sont dénotées suivant une codification fonction de leur position (voir figure 45).

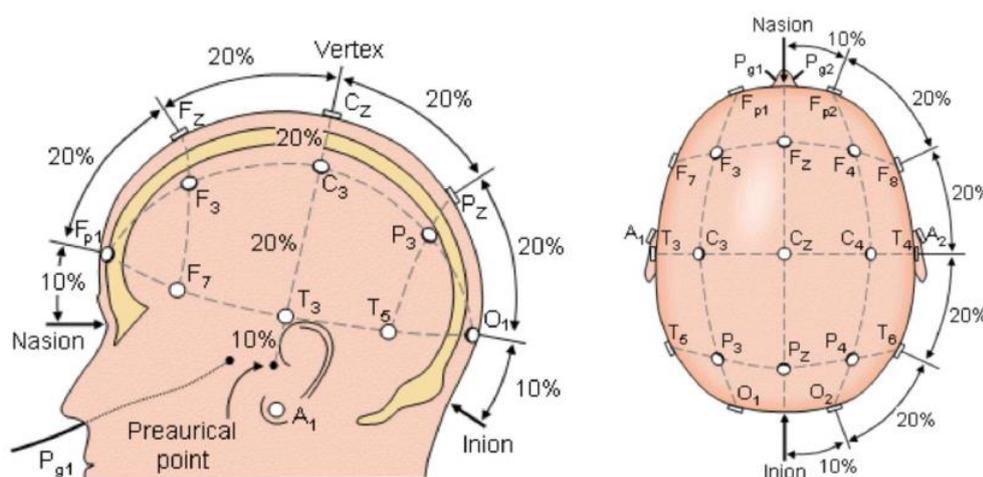


Fig. 44 : Placement des électrodes suivant la norme 10/20 (Morley et al., 2013)

Les électrodes couvrent ainsi toutes les régions cérébrales avec pour dénomination « F » pour celles positionnées sur le frontal, « P » pour le pariétal, « T » pour le temporal, « O » pour l'occipital et « A » pour les oreilles (auriculaire). Les numéros associés à ces lettres suivent également une réglementation stricte avec un numéro impair pour les électrodes positionnées sur le côté gauche, un numéro pair pour celles à droite et la lettre « z » pour celles positionnées sur l'axe.

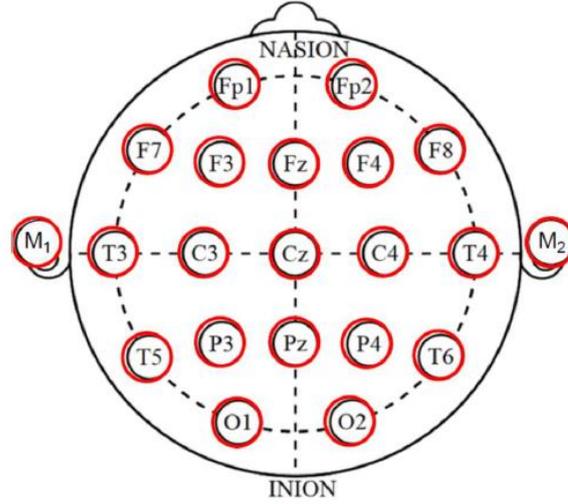


Fig. 45 : Dénomination des électrodes suivant la norme 10/20 (Morley et al., 2013)

De façon plus générale, dans cette étude, on considère que les électrodes de mesure sont placées aux points $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m \in \partial D$ et que l'électrode de référence est placée au point \mathbf{r}_0 . On note $\pi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \pi_i(\mathbf{r})$, les fonctions d'échantillonnage des m électrodes de mesure et $\pi_0(\mathbf{r})$ celle de l'électrode de référence. Chaque différence de potentiel enregistrée à la surface du crâne est alors donnée par :

$$\mu_i = \int_{\partial D} U(\mathbf{r}) (\pi_i(\mathbf{r}) - \pi_0(\mathbf{r})) dS, \quad i = 1 \dots m \quad (203)$$

On considère généralement que les mesures sont ponctuelles, soit $\pi_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ et $\pi_0(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ (où δ est la fonction de Dirac). Puisque les mesures dépendent linéairement de la densité de courant \mathbf{j}^p , il est également possible de les relier à l'aide d'une équation intégrale du type :

$$\mu_i = \int_D \mathbf{l}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (204)$$

Si le cerveau est muni d'un repère cartésien $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, la fonction vectorielle $\mathbf{l}_i(\mathbf{x})$ se décompose sous la forme :

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{x}) = l_i^1(\mathbf{x})\mathbf{e}_1 + l_i^2(\mathbf{x})\mathbf{e}_2 + l_i^3(\mathbf{x})\mathbf{e}_3 = \sum_{d=1}^3 l_i^d(\mathbf{x})\mathbf{e}_d \quad (205)$$

On voit que si la source est ponctuelle, de norme unité, localisée au point \mathbf{x}_s et de direction \mathbf{e}_d avec $d = 1, 2$ ou 3 , soit $\mathbf{j}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_d \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$, alors

$$\mu_i = \mathbf{l}_i(\mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{e}_d = l_i^d(\mathbf{x}_s) \quad (206)$$

En bioelectromagnétisme (Malmivuo et al., 1995) la fonction $\mathbf{l}_i(\mathbf{x})$ est nommée « vector Lead Field Function » ou simplement « Lead Field Function ». C'est le gradient d'une « scalar Lead Field Function », notée $w_i(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{l}_i = \nabla w_i \quad (207)$$

L'équation (204) s'écrit donc également :

$$\mu_i = \int_D \nabla w_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (208)$$

Il est donc nécessaire de déterminer les composantes des fonctions $\mathbf{l}_i(\mathbf{x})$, ou les valeurs des fonctions $w_i(\mathbf{x})$, pour les $i = 1 \dots m$ mesures.

7.2.5 Calcul des Lead Field Functions

D'après la description des Lead Field Functions données ci-dessus, on voit qu'il est possible de calculer leurs composantes en plaçant trois sources unitaires, orthogonales, en chaque point de l'espace et en résolvant, pour chacun de ces points, l'équation (198), (Weinstein et al., 2000). Les composantes du vecteur, au point considéré, sont alors données par les mesures, équation (206). On comprend facilement que cette technique est relativement longue, puisqu'elle consiste à résoudre l'équation (198) autant de fois qu'il y a de points considérés. Une autre approche, moins coûteuse, consiste à résoudre m équations aux dérivées partielles dont les fonctions w_i sont solutions. Pour obtenir ces équations nous avons procédé de la même façon qu'au paragraphe 3.2 : dans un premier temps nous avons récrit l'équation (198) sous la forme :

$$\sigma \nabla U = \mathbf{j}^p \quad (209)$$

Dans un second temps, le tenseur σ étant symétrique, nous avons exprimé l'équation de mesure (208) comme suit :

$$\mu_i = \int_D \nabla w_i \cdot \sigma \nabla U d\mathbf{x} = \int_D \sigma \nabla w_i \cdot \nabla U d\mathbf{x} \quad (210)$$

Enfin, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski nous avons obtenu :

$$\mu_i = - \int_D U \nabla \cdot (\sigma \nabla w_i) d\mathbf{x} + \int_{\partial D} U \sigma \nabla w_i \cdot \mathbf{n} dS \quad (211)$$

Pour retrouver l'équation (203), les fonctions w_i doivent donc être solutions du système :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla w_i) = 0 \text{ dans } D \\ \sigma \nabla w_i \cdot \mathbf{n} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \text{ sur } \partial D \end{cases} \quad (212)$$

On retrouve ainsi les équations obtenues par Vallaghé et al. (2008) qui peuvent être représentées, de façon symbolique, sous la forme

$$\mathcal{L}^*(w_i) = \pi_i(\mathbf{r}) - \pi_0(\mathbf{r}) \quad (213)$$

Connaissant les fonctions scalaires w_i , on obtient les « Lead Field Functions » à l'aide de la relation (207).

7.3 Problème direct et problème inverse

7.3.1 Le problème direct

Le problème direct consiste à simuler le vecteur $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_m]^T$, connaissant la densité de courant primaire \mathbf{j}^p , la diffusivité σ et les paramètres de l'instrumentation π_i . On obtient une solution unique et stable en résolvant :

- Soit l'équation (198) associée aux conditions aux limites (199) et en utilisant l'équation (203) comme équation de sortie (voir la figure 46, que nous avons adaptée de la figure 4).

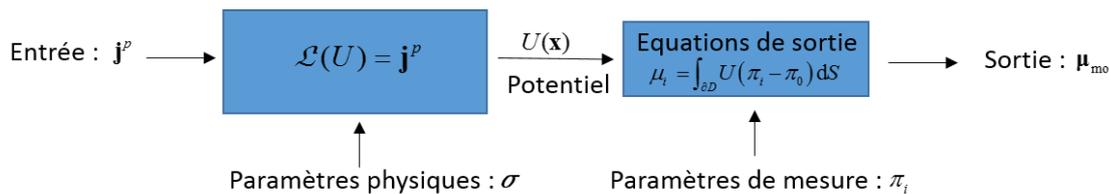


Fig. 46 : Diagramme fonctionnel de l'approche basée source

- Soit le système (212) et en utilisant (204) comme équation de sortie (voir figure 47 que nous avons adaptée de la figure 6).

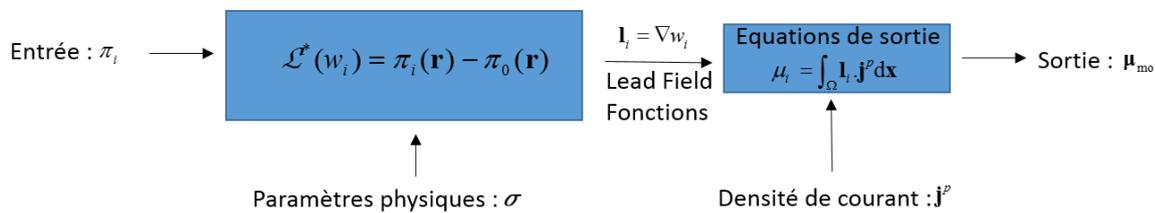


Fig. 47 : Diagramme fonctionnel de l'approche basée récepteurs

Dans le premier cas on parle d'approche basée source, dans le second d'approche basée récepteurs.

7.3.2 Le problème inverse

Le problème inverse « neuro-électrique » consiste à retrouver la densité de courant primaire \mathbf{j}^p , connaissant le vecteur $\boldsymbol{\mu}$, la diffusivité $\boldsymbol{\sigma}$ et les paramètres de l'instrumentation π_i . Après avoir calculé les Lead Field Functions, on peut le définir comme suit :

Soit les fonctions $\mathbf{I}_i, i = 1, \dots, m$ et soit les mesures μ_i , trouver la densité

P-8

de courant \mathbf{j}^p telle que $\mu_i = \int_D \mathbf{I}_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{j}^p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall i = 1, \dots, m$

La recherche d'une solution à ce problème inverse est rendue difficile par le fait que le nombre de macro-colonnes de neurones ayant généré le courant n'est jamais connu a priori. Il faut donc, dans le cas général, reconstruire un champ de vecteur continu sur l'ensemble du domaine D . Le nombre de vecteurs étant largement supérieur au nombre d'électrodes, le problème est sous déterminé et possède une infinité de solution.

7.4 Problème discret

7.4.1 Modèle de source

Nous avons vu, modèle (201), que l'activité d'une macro-colonne de neurones localisée au point de coordonnées $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k, z_k)^T$, peut être représentée par celle d'un dipôle de courant équivalent : $\mathbf{j}_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ (de moment \mathbf{j}_k , d'intensité $j_k = \|\mathbf{j}_k\|$ et de direction $\mathbf{d}_k = \frac{\mathbf{j}_k}{\|\mathbf{j}_k\|}$). Ainsi, si le cerveau est discrétisé en une grille (ou maillage) constituée de $k = 1 \dots n$ points (ou nœuds), chaque point de la grille peut être considéré comme étant le centre de gravité d'un petit élément de volume dans lequel l'activité électrique est uniforme et représentée par un dipôle équivalent. La densité de courant primaire générée par l'ensemble de ces dipôles est (Heller & Volegov, 2014) :

$$\mathbf{j}^p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n \mathbf{j}_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \quad (214)$$

Si on reporte cette expression dans l'équation de mesure (206), on obtient :

$$\mu_i = \sum_{k=1}^n \mathbf{I}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{j}_k, \quad i = 1, \dots, m \quad (215)$$

De plus, dans le repère considéré, \mathbf{j}_k (que l'on notera parfois $\mathbf{j}(\mathbf{x}_k)$) peut être vu comme étant la somme de trois vecteurs orthogonaux orientés respectivement suivant $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{j}_k = j_k^1 \mathbf{e}_1 + j_k^2 \mathbf{e}_2 + j_k^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{d=1}^3 j_k^d \mathbf{e}_d \quad (216)$$

De même, chaque « Lead Field Function » se décompose sous la forme :

$$\mathbf{l}_i(\mathbf{x}_k) = l_i^1(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_1 + l_i^2(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_2 + l_i^3(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_3 = \sum_{d=1}^3 l_i^d(\mathbf{x}_k) \mathbf{e}_d \quad (217)$$

En posant $J_{3(k-1)+d} = j_k^d$ avec $d = 1, 2$ ou 3 , $\mathbf{L}_{i,3(k-1)+1} = l_i^1(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{L}_{i,3(k-1)+2} = l_i^2(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{L}_{i,3(k-1)+3} = l_i^3(\mathbf{x}_k)$, on obtient la relation sources-mesures sous la forme d'un système linéaire :

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}\mathbf{J} \quad (218)$$

On voit que l'ensemble des $k = 1 \dots n$ vecteurs $\mathbf{j}_k \in \mathbb{R}^3$ forme un champ de vecteurs représenté par le vecteur $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3n}$, appelé « le vecteur source » :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{j}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_n \end{pmatrix} \quad (219)$$

7.4.2 Lead Field Matrix

La matrice $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times 3n}$ qui apparait dans le modèle (218) est la matrice dite des « Lead Fields ». Elle est parfois appelée « matrice de gain » (Greenblatt et al., 2005). Ses composantes $\mathbf{L}_{i,3(k-1)+1}$, $\mathbf{L}_{i,3(k-1)+2}$, $\mathbf{L}_{i,3(k-1)+3}$ ($i = 1 \dots m$ et $k = 1 \dots n$) représentent respectivement la sensibilité de la $i^{\text{ème}}$ électrode aux composantes j_k^1, j_k^2, j_k^3 du vecteur \mathbf{j}_k . Il est plus simple de noter la colonne $\mathbf{L}_{\bullet,3(k-1)+d}$ sous la forme \mathbf{L}_k^d , avec $d = 1, 2, 3$. Ainsi, on pourra représenter la matrice \mathbf{L} sous la forme

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1^1 \mathbf{L}_1^2 \mathbf{L}_1^3 \quad \mathbf{L}_2^1 \mathbf{L}_2^2 \mathbf{L}_2^3 \quad \dots \quad \mathbf{L}_n^1 \mathbf{L}_n^2 \mathbf{L}_n^3] \quad (220)$$

Chaque colonne $\mathbf{L}_k^d \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur des mesures que l'on observerait si une source unique, ponctuelle, d'intensité 1, de direction \mathbf{e}_d , était localisée sur le nœud de coordonnée \mathbf{x}_k .

Ainsi, lorsqu'une source ponctuelle, d'intensité quelconque, est portée par l'un des trois vecteurs \mathbf{e}_d , on a :

$$\boldsymbol{\mu} = j_k^d \mathbf{L}_k^d \quad (221)$$

On peut aussi représenter \mathbf{L} sous la forme d'une matrice constituée de n blocs \mathbf{L}_k de dimension $m \times 3$

$$\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{L}_n] \quad (222)$$

Avec cette notation, si la source est unique, ponctuelle, localisée en \mathbf{x}_k , de direction et d'intensité quelconques, le modèle (218) devient

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}_k \mathbf{j}_k \quad (223)$$

7.4.3 Problème inverse discret

On peut définir le problème inverse discret comme suit :

Sachant $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, trouver le vecteur \mathbf{J} qui explique les mesures observées

P-9

Dans ce cas, le nombre total d'inconnues du problème correspond au nombre de composantes du vecteur \mathbf{J} , c'est-à-dire à $3n$. Or ce nombre dépasse largement le nombre d'équations données par le modèle (218) (qui est égal au nombre d'électrodes, m). Le problème est donc, comme dans le cas des rejets atmosphériques, sous-déterminé et possède une infinité de solutions (plusieurs configurations de sources différentes peuvent produire le même potentiel en surface).

7.4.4 Forme générale des solutions

Afin de réduire l'espace des solutions et d'obtenir une solution unique, il est nécessaire de formuler des hypothèses, a priori, concernant la solution recherchée. Le problème étant linéaire, cette solution s'écrit sous la forme

$$\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\mu} \quad (224)$$

où \mathbf{G} est une matrice à $3n$ lignes et m colonnes dont l'expression dépend des hypothèses formulées. Notons que, quelle que soit la forme de la source réelle \mathbf{J} (sources ponctuelles ou diffuses), l'estimation $\hat{\mathbf{J}}$ donnée par (224) est toujours un champ constitué de n vecteurs.

7.4.5 Matrice de résolution

En s'inspirant de ce que nous avons présenté au paragraphe 4.5, on peut substituer le modèle (218) dans l'équation (224), on obtient une expression qui relie la solution $\hat{\mathbf{J}}$ et la source réelle inconnue \mathbf{J} :

$$\hat{\mathbf{J}} = \mathbf{GLJ} = \mathbf{RJ} \quad (225)$$

$\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ est la matrice de résolution du modèle. L'équation (225) montre que lorsque \mathbf{R} « s'apparente » à la matrice identité de dimension $3n$, \mathbf{I}_{3n} , alors la solution $\hat{\mathbf{J}}$ correspond à la solution réelle \mathbf{J} . Mais ceci est impossible car le système d'équation étant sous-déterminé, la matrice \mathbf{R} est de rang m et ne peut pas être égale à \mathbf{I}_{3n} . $\hat{\mathbf{J}}$ sera donc considéré comme étant une « bonne solution » si \mathbf{R} est « proche » de la matrice identité. Pour comprendre cela de façon plus précise, on peut analyser cette matrice en utilisant les notions de « Resolution Kernels » et de « Point Spread Functions » précédemment introduites (§ 4.5).

Resolution kernels

Conventionnellement, les lignes de la matrice \mathbf{R} sont appelées les « Resolution kernels ». Ces lignes peuvent être vues comme un ensemble de filtres qui transforment la solution réelle en chaque point du domaine. En effet, chaque composante du vecteur $\hat{\mathbf{J}}$, notée $\hat{J}_j = \hat{J}_k^d$ (avec l'indice $j = 3(k-1) + d$, $k = 1, \dots, n$ et $d = 1, 2, 3$), peut s'écrire sous la forme :

$$\hat{J}_j = \mathbf{R}_{j,\bullet} \cdot \mathbf{J} \quad (226)$$

On voit que l'estimation \hat{J}_j est une somme pondérée des composantes de la source réelle (les poids étant les éléments de la $j^{\text{ème}}$ ligne de \mathbf{R}). Pour que l'estimation \hat{J}_j dépende principalement de J_j (et ne soit pas trop influencée par d'autres sources), il faut que chaque ligne de cette matrice atteigne son maximum au niveau de la diagonale et que ses termes non diagonaux soient faibles ou nuls.

Point Spread Functions

Conventionnellement, les colonnes de la matrice \mathbf{R} sont appelées les « Point Spread Functions ». Ces fonctions nous renseignent sur la façon dont la solution se comporte en cas

d'une source unique, ponctuelle, orientée suivant la direction \mathbf{e}_1 ou \mathbf{e}_2 ou \mathbf{e}_3 . En effet, on peut écrire l'équation (226) sous la forme

$$\hat{\mathbf{J}} = J_1 \mathbf{R}_{\bullet,1} + J_2 \mathbf{R}_{\bullet,2} + \dots + J_{3n} \mathbf{R}_{\bullet,3n} \quad (227)$$

Dans le cas où la source est unique, localisée au point \mathbf{x}_s et orientée suivant \mathbf{e}_d , c'est-à-dire si le vecteur \mathbf{J} n'a qu'une composante non nulle $J_{3(s-1)+d} = j_s^d$ (avec $s \in [1, n]$ et $d = 1$ ou 2 ou 3), alors on aura

$$\hat{\mathbf{J}} = j_s^d \mathbf{R}_{\bullet,3(s-1)+d} \quad (228)$$

On voit qu'en partant d'un vecteur source réel n'ayant qu'une seule composante non nulle, on obtient une estimation $\hat{\mathbf{J}}$ dont toutes les composantes peuvent être non nulles. Ainsi, pour être en mesure de retrouver la position de n'importe quelle source unique, il faut que les éléments d'indice $j = 3(s-1) + d$ des colonnes $\mathbf{R}_{\bullet,3(s-1)+d}$ (c.à.d. les termes R_{jj} qui se trouvent sur la diagonale de \mathbf{R}) soient les plus grands de leurs colonnes. On s'assure alors d'avoir le terme \hat{J}_j supérieur à tous les autres termes du vecteur. La méthode de renormalisation, utilisée pour localiser et caractériser des sources de contamination atmosphérique à partir de mesures de concentration, permet d'obtenir des matrices de résolution possédant cette propriété. Cependant, jusqu'à présent, elle n'avait été utilisée que pour reconstruire des champs de scalaires. Nous l'avons donc adapté (et décliné en plusieurs versions) afin de reconstruire des champs de vecteurs.

7.5 Adaptation de la méthode de renormalisation

7.5.1 RenormID

Cette version est une adaptation directe de la méthode de renormalisation utilisée en physique atmosphérique lorsque le champ à reconstruire est un champ scalaire.

Etape 1

On définit une matrice de pondération diagonale, carrée $\mathbf{W} = \text{Diag}(w_1^1, w_1^2, w_1^3, \dots, w_n^1, w_n^2, w_n^3) \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ telle que les poids w_k^d , vérifient les conditions dites de « renormalisation classiques » :

$$(i) w_k^d > 0 \quad (ii) \sum_{k=1}^n w_k^d = m \quad (d = 1, 2, 3) \quad (iii) (w_k^d)^2 = \mathbf{L}_k^{dT} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k^d \quad (229)$$

où $\mathbf{H}_w \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de Gram telle que $\mathbf{H}_w = \mathbf{LW}^{-1}\mathbf{L}^T$.

- La condition (ii) peut aussi être exprimée sous la forme $trace(\mathbf{W}) = m$.
- La condition (iii) peut être exprimée sous les formes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} w_k^d &= \sqrt{\mathbf{L}_k^{dT} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k^d} = \|\mathbf{L}_k^d\|_{\mathbf{H}_w^{-1}} \\ (w_k^d)^2 &= \mathbf{L}_k^{dT} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k^d \end{aligned} \quad (230)$$

ou encore

$$\begin{aligned} (w_k^d)^{-1} \mathbf{L}_k^{dT} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k^d (w_k^d)^{-1} &= 1 \\ \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-1} &= \mathbf{I}_3 \text{ avec } \mathbf{W}_k = \text{diag}(w_k^1, w_k^2, w_k^3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \end{aligned} \quad (231)$$

Etape 2

On obtient les poids optimaux à l'aide du schéma itératif suivant

$$(w_k^d)_{\alpha+1} = (w_k^d)_\alpha^{-1} \sqrt{(w_k^d)_\alpha \mathbf{L}_k^{dT} (\mathbf{H}_w^{-1})_\alpha \mathbf{L}_k^d (w_k^d)_\alpha^{-1}} \text{ avec } (w_k^d)_0 = n/m \quad (232)$$

Etape 3

On définit la matrice des Lead Fields pondérés $\mathbf{T} = \mathbf{LW}^{-1}$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{L}_1^1}{w_1^1} \frac{\mathbf{L}_1^2}{w_1^2} \frac{\mathbf{L}_1^3}{w_1^3} & \frac{\mathbf{L}_2^1}{w_2^1} \frac{\mathbf{L}_2^2}{w_2^2} \frac{\mathbf{L}_2^3}{w_2^3} & \dots & \frac{\mathbf{L}_n^1}{w_n^1} \frac{\mathbf{L}_n^2}{w_n^2} \frac{\mathbf{L}_n^3}{w_n^3} \end{bmatrix} \quad (233)$$

On a ainsi $\mathbf{H}_w = \mathbf{TL}^T = \mathbf{TWT}^T$. Comme la matrice \mathbf{L} , la matrice \mathbf{T} peut être représentée sous la forme d'une matrice constituée de n blocs $\mathbf{T}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-1}$ de dimension $m \times 3$

$$\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \dots \quad \mathbf{T}_n] \quad (234)$$

La condition (iii) peut alors être exprimée sous la forme

$$\mathbf{T}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{T}_k = \mathbf{I}_3 \quad (235)$$

Etape 4

On choisit, comme solution au problème inverse, la solution de norme $\|\mathbf{J}\|_w$ minimale. Cette solution est :

$$\mathbf{J}_{//} = \mathbf{T}^T \mathbf{H}_w^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{H}_w^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (236)$$

On a donc

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{H}_w^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (w_1^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \\ (w_1^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \\ (w_1^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \\ \vdots \\ (w_N^1)^{-1} \mathbf{L}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \\ (w_N^2)^{-1} \mathbf{L}_n^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \\ (w_N^3)^{-1} \mathbf{L}_n^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \end{bmatrix} \quad (237)$$

Dans ce cas, en utilisant la condition de renormalisation, la matrice de résolution $\mathbf{R} = \mathbf{G}\mathbf{L}$ est de la forme :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} w_1^1 & (w_1^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_1^2 & (w_1^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_1^3 & \dots & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^1 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^2 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^3 \\ (w_1^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_1^1 & w_1^2 & (w_1^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_1^3 & \dots & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^1 & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^2 & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^3 \\ (w_1^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_1^1 & (w_1^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_1^2 & w_1^3 & \dots & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^1 & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^2 & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & w_n^1 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^2 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^3 \\ & & & & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_n^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^1 & w_n^2 & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_n^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^3 \\ & & & & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_n^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^1 & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_n^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_n^2 & w_n^3 \end{bmatrix} \quad (238)$$

Ainsi, si la source est unique, localisée en \mathbf{x}_s , avec $s \in [1, n]$, et portée par un des trois vecteurs \mathbf{e}_d , alors :

$$\mathbf{J}_{//} = j_s^d \mathbf{R}_{\bullet, 3(s-1)+d} = j_s^d \begin{bmatrix} (w_1^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s^p \\ (w_1^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s^p \\ (w_1^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s^p \\ \vdots \\ w_s^d \\ \vdots \\ (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_n^{2T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s^p \\ (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_n^{3T} \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s^p \end{bmatrix} \quad \text{avec } d = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3. \quad (239)$$

On peut montrer que le terme diagonal w_s^d est supérieur ou égal aux autres termes de la colonne $\mathbf{R}_{\bullet, 3(s-1)+d}$. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la condition de renormalisation nous permettent d'écrire :

$$(w_k^g)^{-1} \mathbf{L}_k^g \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s^g \leq (w_k^g)^{-1} \underbrace{\sqrt{\mathbf{L}_k^g \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k^g}}_{w_k^g} \underbrace{\sqrt{\mathbf{L}_s^d \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s^d}}_{w_s^d} \leq w_s^d \quad \forall g, d = 1, 2, 3 \quad (240)$$

Grâce à cette propriété, le vecteur $\mathbf{J}_{//}$ a sa composante maximale orientée suivant \mathbf{e}_d et localisée en \mathbf{x}_s . Ainsi, la position, la direction et l'intensité du dipôle unique sont données par

$$\mathbf{x}_s = \arg \max_{k=1..n} \{j_{//}^d(\mathbf{x}_k)\}, \quad \mathbf{e}_s = \mathbf{e}_d \quad \text{et} \quad j_s^d = \frac{j_{//}^d(\mathbf{x}_s)}{w_s^d} \quad (241)$$

Bilan

Avec la méthode Remorm1D, on reconstruit un champ de vecteur $\mathbf{J}_{//}$. Si la source réelle est unique et portée par un des trois vecteurs \mathbf{e}_d , alors la composante maximale de $\mathbf{J}_{//}$ sera localisée à l'emplacement de la source réelle. Cette propriété dite « zero dipole localization bias » n'est utile que si la direction de la source correspond à celle d'un des vecteurs du repère cartésien défini initialement. Dans le cas d'une source unique, ponctuelle, de direction quelconque, la méthode doit être généralisée. Nous avons donc proposé, avec Xavier Busch, une nouvelle approche : Renorm3D.

7.5.2 Renorm3D

Etape 1

On définit une matrice de pondération carrée, symétrique, de dimension $3n \times 3n$, diagonale par blocs

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, k = 1 \dots n \quad (242)$$

telle que

(i) $trace(\mathbf{W}) = m$,

(ii) les blocs \mathbf{W}_k vérifient la condition de renormalisation suivante :

$$\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-1} = \mathbf{I}_3 \quad (243)$$

où $\mathbf{H}_w \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de Gram telle que $\mathbf{H}_w = \mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T$.

La condition (ii) peut être exprimée sous la forme équivalente suivante :

$$\mathbf{W}_k^2 = \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \quad (244)$$

Etape 2

On obtient chacun des blocs \mathbf{W}_k à l'aide du schéma itératif suivant :

$$(\mathbf{W}_k)_{\alpha+1} = \sqrt{\mathbf{L}_k^T (\mathbf{H}_w^{-1})_{\alpha} \mathbf{L}_k} \text{ avec } (\mathbf{W}_k)_0 = \mathbf{I}_3 \quad (245)$$

Etape 3

On définit la matrice des Lead Fields pondérés $\mathbf{T} = \mathbf{L}\mathbf{W}^{-1}$. La condition (ii) peut alors être exprimée sous la forme

$$\mathbf{T}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{T}_k = \mathbf{I}_3, \text{ avec } \mathbf{T}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-1} \quad (246)$$

Etape 4

On choisit, comme solution au problème inverse, la solution de norme $\|\mathbf{J}\|_w$ minimale. Cette solution est :

$$\mathbf{J}_{//} = \mathbf{T}^T \mathbf{H}_w^{-1} \boldsymbol{\mu} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{H}_w^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (247)$$

On a donc

$$\mathbf{G} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T \mathbf{H}_w^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \end{bmatrix} \quad (248)$$

La matrice de résolution $\mathbf{R} = \mathbf{G}\mathbf{L}$ est de la forme :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} & \cdots & \mathbf{R}_{1n} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \cdots & \mathbf{R}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{n1} & \mathbf{R}_{n2} & \cdots & \mathbf{R}_{nn} \end{pmatrix} \quad (249)$$

où, d'après la relation (244), chaque bloc, de dimension 3×3 , noté \mathbf{R}_{kl} ($k, l = 1 \dots n$), est tel que :

$$\mathbf{R}_{kl} = \begin{cases} \mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_l & \text{si } l \neq k \\ \mathbf{W}_l & \text{si } l = k \end{cases} \quad (250)$$

Aussi, si la source \mathbf{j}_s , localisée en \mathbf{x}_s , avec $s \in [1, n]$, possède une direction et une intensité quelconques, on aura :

$$\mathbf{J}_{//} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1s} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{ss} \\ \vdots \\ \mathbf{R}_{ns} \end{bmatrix} \mathbf{j}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s \\ \vdots \\ \mathbf{W}_s \\ \vdots \\ \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{L}_n^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s \end{bmatrix} \mathbf{j}_s \quad (251)$$

Pour montrer que la méthode Renorm1D permettait de localiser la position de chaque source unique orientée suivant \mathbf{e}_p , il nous avait suffi de montrer que la composante $j_{//}^d(\mathbf{x}_s)$ était la plus grande du vecteur. Cette approche n'est plus adaptée ici puisqu'une source localisée quelconque possède trois composantes potentiellement non nulles. Rappelons que le vecteur $\mathbf{J}_{//}$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{J}_{//} = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \text{ avec } \mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_k) \in \mathbb{R}^3 \quad (252)$$

Il faut donc raisonner en terme de norme et montrer que celle de $\mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_s)$ est la plus grande de toutes celles des composantes de $\mathbf{J}_{//}$. On utilisera ici la norme Euclidienne usuelle $\|\xi\| = \sqrt{\xi^T \xi} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^m$. D'après (251), on a :

$$\|\mathbf{j}_{//s}\|^2 = \mathbf{j}_s^T \mathbf{W}_s^2 \mathbf{j}_s \text{ et } \|\mathbf{j}_{//k}\|^2 = \mathbf{j}_s^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s \mathbf{j}_s \text{ pour } k \neq s \quad (253)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{j}_{//k}\|^2 &\leq \sqrt{\mathbf{j}_s^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s \mathbf{j}_s} \sqrt{\mathbf{j}_s^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s \mathbf{j}_s} \\
 \|\mathbf{j}_{//k}\|^2 &\leq \sqrt{\mathbf{j}_s^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{W}_k^2 \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s \mathbf{j}_s} \sqrt{\mathbf{j}_s^T \mathbf{W}_s^2 \mathbf{j}_s} \\
 \|\mathbf{j}_{//k}\|^2 &\leq \sqrt{\mathbf{j}_s^T \mathbf{L}_s^T \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{L}_k \mathbf{H}_w^{-1} \mathbf{L}_s \mathbf{j}_s} \|\mathbf{j}_{//s}\| \\
 \|\mathbf{j}_{//k}\|^2 &\leq \|\mathbf{j}_{//k}\| \|\mathbf{j}_{//s}\|
 \end{aligned} \tag{254}$$

On a donc $\|\mathbf{j}_{//k}\| \leq \|\mathbf{j}_{//s}\| \forall k \neq s$, le champ estimé est donc bien de norme maximale au point d'impulsion, soit

$$\mathbf{x}_s = \arg \max_{k=1..n} \{\|\mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_k)\|\} \tag{255}$$

D'après (251), on a aussi :

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{W}_s^{-1} \mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_s) \tag{256}$$

Bilan :

Avec la méthode RENORM3D, on reconstruit un champ de n vecteurs. Si la source réelle se trouve être une source ponctuelle de direction quelconque, alors la norme euclidienne ordinaire des vecteurs estimés sera maximale au point d'émission. Cette propriété dite « zero dipole localization error » est plus générale que celle vérifiée par la méthode RENORM1D.

7.5.3 *RENORM_param*

S'il est raisonnable de supposer, a priori, que la source \mathbf{j}_s est unique et localisé en \mathbf{x}_s , il est possible d'utiliser une approche paramétrique similaire à celle proposée au paragraphe 5.5 pour la localisation de sources multiples. En effet, une telle source correspond à la somme de trois sources uniques, localisées en \mathbf{x}_s , orthogonales, orientées respectivement suivant les directions $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Le problème consiste alors à retrouver les 6 paramètres caractéristiques de cette source, c'est-à-dire les 3 composantes de \mathbf{x}_s et les 3 composantes de \mathbf{j}_s . Ce problème peut être formulé sous la forme :

Connaissant $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^m$, trouver les paramètres $(\hat{x}_s, \hat{y}_s, \hat{z}_s, \hat{j}_s^1, \hat{j}_s^2, \hat{j}_s^3)^T$ qui
expliquent au mieux les mesures observées

P-10

Ces paramètres sont ceux qui minimisent une fonction coût du type :

$$F(\mathbf{j}_k, \mathbf{x}_k) = \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_{\text{mo}}(\mathbf{j}_k, \mathbf{x}_k)\|_{\mathbf{W}_m}^2 \quad (257)$$

où $\mathbf{W}_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est une matrice définie positive à partir de laquelle on définit le produit scalaire

$$(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2)_{\mathbf{W}_m} = \boldsymbol{\xi}_2^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\xi}_1 \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{R}^m. \quad \text{La norme associée est } \|\boldsymbol{\xi}\|_{\mathbf{W}_m} = (\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})_{\mathbf{W}_m}^{1/2} = \sqrt{\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\xi}}.$$

D'après (223) on sait que, pour toute source localisée en \mathbf{x}_k , le modèle est de la forme :

$$\boldsymbol{\mu}_{\text{mo}} = \mathbf{L}_k \mathbf{j}_k \quad (258)$$

La fonction coût devient alors

$$F(\mathbf{j}_k, \mathbf{x}_k) = \|\boldsymbol{\mu} - \mathbf{L}_k \mathbf{j}_k\|_{\mathbf{W}_m}^2 = (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{L}_k \mathbf{j}_k)^T \mathbf{W}_m (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{L}_k \mathbf{j}_k) \quad (259)$$

Trouver les paramètres qui minimisent la fonction F est un problème d'optimisation. Pour le simplifier (en réduisant la dimension de l'espace de recherche), on peut utiliser la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre qui indique que si $(\mathbf{j}_s, \mathbf{x}_s)$ est un minimum de F alors

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{j}_s, \mathbf{x}_s) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{j}}(\mathbf{j}_s, \mathbf{x}_s) = 0. \quad \text{En dérivant } F \text{ par rapport à } \mathbf{j}, \text{ on obtient :}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{j}} = -2\mathbf{L}_k^T \mathbf{W}_m (\boldsymbol{\mu} - \mathbf{L}_k \mathbf{j}_k) \quad (260)$$

soit :

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{j}} = 0 \Rightarrow \mathbf{j}_k = (\mathbf{L}_k^T \mathbf{W}_m \mathbf{L}_k)^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} \quad (261)$$

Cette relation nous donne, pour chaque position \mathbf{x}_k , une seule expression admissible pour le vecteur \mathbf{j}_k . En substituant l'expression (261) dans l'expression (259), on obtient une nouvelle fonction coût F' qui ne dépend que de \mathbf{x}_k :

$$F'(\mathbf{x}_k) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \mathbf{L}_k (\mathbf{L}_k^T \mathbf{W}_m \mathbf{L}_k)^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} \quad (262)$$

Puisque $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} = \|\boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{W}_m}^2$ est positif, l'équation (262) nous indique que $F'(\mathbf{x}_k)$ est minimum lorsque $Q(\mathbf{x}_k) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{W}_m \mathbf{L}_k (\mathbf{L}_k^T \mathbf{W}_m \mathbf{L}_k)^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu}$ est maximum. Ainsi, en cherchant en quel point du maillage Q est maximum, on trouve la position du dipôle :

$$\mathbf{x}_s = \arg \max_{k=1..n} \{Q(\mathbf{x}_k)\} \quad (263)$$

et son moment :

$$\mathbf{j}_s = \left(\mathbf{L}_s^T \mathbf{W}_m \mathbf{L}_s \right)^{-1} \mathbf{L}_s^T \mathbf{W}_m \boldsymbol{\mu} \quad (264)$$

Si on prend $\mathbf{W}_m = \mathbf{H}_W^{-1}$ alors, en utilisant les équations (244) et (253), on a

$$Q(\mathbf{x}_k) = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_W^{-1} \mathbf{L}_k \left(\mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1} \mathbf{L}_k \right)^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{H}_W^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1} \boldsymbol{\mu} = \|\mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_k)\|^2 \quad (265)$$

soit

$$\mathbf{x}_s = \arg \max_{k=1..n} \left\{ \|\mathbf{j}_{//}(\mathbf{x}_k)\|^2 \right\} \quad (266)$$

On retrouve alors l'équation (255) obtenue dans un cas plus général d'une approche non paramétrique.

7.5.4 Algorithme pour la mise en œuvre de la méthode RENORM3D

Pour calculer la matrice de pondération \mathbf{W} définie par la méthode Renorm3D, il n'est pas possible d'utiliser l'algorithme présenté au paragraphe 4.6. En effet, il ne s'agit plus de calculer les n termes diagonaux de la matrice de résolution, mais les n blocs diagonaux, de dimension 3×3 , de cette dernière. Puisque, d'après la relation (250), la condition de renormalisation peut s'exprimer sous la forme $\mathbf{R}_{kk} \mathbf{W}_k^{-1} = \mathbf{I}_3$, nous avons développé un nouvel algorithme qui calcule les n blocs \mathbf{W}_k en utilisant une unique boucle « FOR » imbriquée dans une boucle « WHILE ». Ce dernier est composé de trois parties distinctes.

La première partie concerne le calcul de l'inverse de la matrice de Gram \mathbf{H}_W^{-1} . Elle implique :

- la transposition de la matrice \mathbf{L} (complexité d'ordre $O(mn)$),
- le calcul de la matrice $\mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T$ (complexité d'ordre $O(nm)$),
- le produit matriciel $\mathbf{H}_W = \mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T$ (complexité d'ordre $O(m^2n)$),
- l'inversion de \mathbf{H}_W (complexité d'ordre $O(m^3)$).

La seconde partie concerne le calcul, à l'aide d'une boucle FOR, des n blocs diagonaux $\mathbf{R}_{kk} \mathbf{W}_k^{-1}$ de la matrice de résolution pondérée. Chaque boucle comprend :

- La transposition du bloc \mathbf{L}_k de dimension $m \times 3$ (complexité d'ordre $O(m)$),
- le calcul de $\mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1}$ et du produit matriciel $\mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1} \mathbf{L}_k$ (complexité d'ordre $O(m^2)$),
- le calcul du bloc $\mathbf{W}_k = \sqrt{\mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1} \mathbf{L}_k}$ de dimension 3×3 , (complexité d'ordre $O(3^3)$),

- le calcul du produit matriciel $\mathbf{R}_{kk} \mathbf{W}_k^{-1} = \mathbf{W}_k \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-1}$ (complexité d'ordre $O(m)$).

Une dernière étape consiste, une fois la boucle achevée, à vérifier la condition de convergence $\mathbf{W}_k^{-1} \mathbf{L}_k^T \mathbf{H}_W^{-1} \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-1} = \mathbf{I}_3 \forall k = 1 \dots n$ (complexité d'ordre $O(n)$). Si cette condition n'est pas vérifiée, une nouvelle boucle est lancée en utilisant le schéma itératif (245).

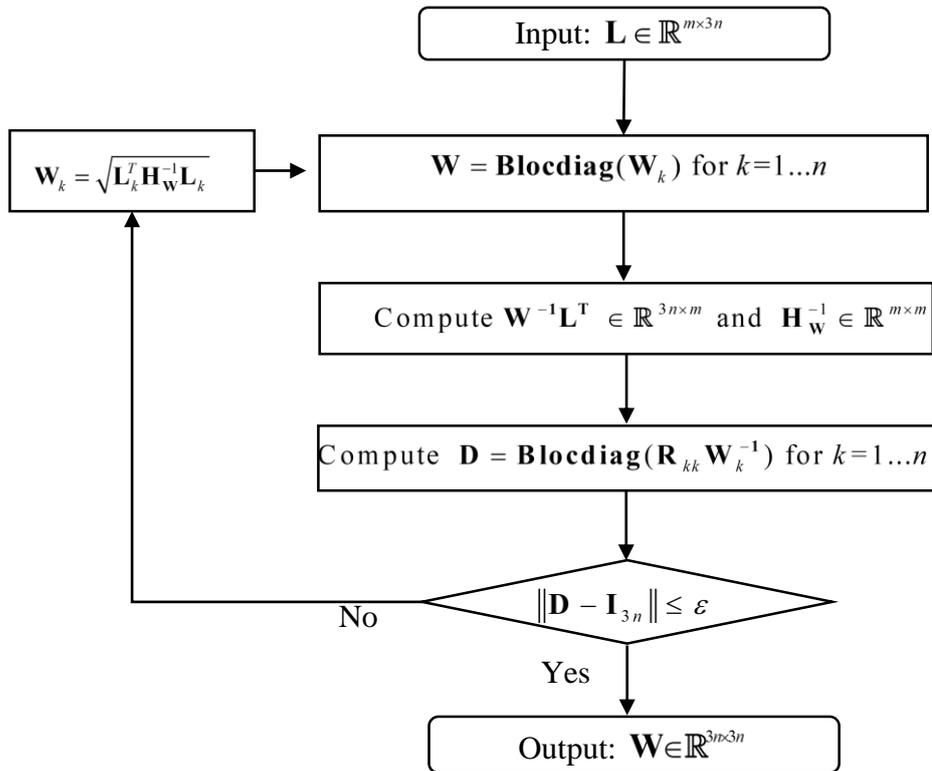


Fig. 48 : Organigramme de l'algorithme proposé.

Puisque $n \gg m$, la complexité de la première partie est d'ordre $O(m^2n)$, celle de la seconde, exécutée n fois, est d'ordre $O(n * O(m^2)) = O(nm^2)$. Globalement la complexité de l'algorithme est donc d'ordre $O(m^2n)$. En ce qui concerne le stockage des données, les matrices les plus imposantes à stocker (\mathbf{L} et sa transposée) sont de dimensions $m \times 3n$. En effet, les blocs diagonaux de la matrice $\mathbf{R}\mathbf{W}^{-1}$ sont stockés dans une matrice creuse (« sparse matrix »), diagonale par blocs, de dimension $3n \times 3n$, ne possédant que $9n$ termes non nuls. En conséquence, la complexité de l'algorithme en terme de stockage est d'ordre $O(mn)$. Nous avons proposé une version totalement vectorisée de cet algorithme écrit en code

Matlab – version 8.4. La fonction Matlab créée a été appelée RENORM3D. Elle est présentée en annexe, paragraphe 10.2. Pour améliorer ses performances, nous avons utilisé ici aussi les fonctions intégrées de Matlab, comme l’opérateur de division matricielle backslash, « \ » (plutôt que l’opérateur « inv »). Nous avons testé cet algorithme sur des données synthétiques et sur des données réelles. Les résultats sont présentés en annexe, paragraphe .

7.6 Comparaison avec d’autres méthodes d’inversion

Afin de replacer les méthodes que nous avons développées dans le contexte général de la résolution du problème inverse neuro-électrique, nous avons réalisé une comparaison avec les principales autres méthodes disponibles dans la littérature. Pour cela, nous avons analysé plusieurs articles de synthèse (Grave de Peralta et Gonzalez-Andino, 1999 ; Pascual-Marqui, 1999 ; Gresh et al., 2008 ; Awan et al., 2018). Ces derniers montrent que les méthodes de résolution du problème inverse linéaire P-9, se divisent en deux catégories principales :

1. la première regroupe des solutions construites à partir d’inverses généralisés,
2. la seconde des méthodes basées sur des solutions régularisées et/ou normalisées.

7.6.1 Solutions obtenues à l’aide d’inverses généralisés

Dans cette catégorie on trouve la solution de norme minimale (MN), issue des travaux précurseurs de (Crowley et al., 1989) ou de (Hämäläinen et Ilmoniemi, 1994), qui s’exprime sous la forme :

$$\mathbf{J}_{MN} = \mathbf{G}_{MN} \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{G}_{MN} = \mathbf{L}^T (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} \quad (267)$$

On reconnaît, dans l’expression de \mathbf{G}_{MN} , le pseudo inverse de la matrice \mathbf{L} . Cette solution a été abondamment critiquée, notamment car elle pénalise fortement les sources profondes et fournit des distributions concentrées près de la surface de mesure. Pour éviter cela, il existe deux stratégies. La première consiste à « standardiser » la solution de norme minimale (Greenblatt et al., 2005). C’est la technique qu’utilise la méthode sLORETA (standardized low resolution electromagnetic tomography) proposée par Pascual-Marqui et al. (2002). Dans ce cas, la densité de courant en chaque point du domaine est obtenue sous la forme :

$$\mathbf{j}_{sLOR}(\mathbf{x}_k) = \left[\mathbf{L}_k^T (\mathbf{L}\mathbf{L}^T) \mathbf{L}_k \right]^{-1/2} \mathbf{j}_{MN}(\mathbf{x}_k) = \left[\mathbf{L}_k^T (\mathbf{L}\mathbf{L}^T) \mathbf{L}_k \right]^{-1/2} \left[\mathbf{L}_k^T (\mathbf{L}\mathbf{L}^T)^{-1} \right] \boldsymbol{\mu} \quad (268)$$

La seconde stratégie consiste à pondérer la Lead Field Matrix à l'aide d'une matrice $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$. La solution de norme minimale pondérée (WMN) est alors de la forme :

$$\mathbf{J}_{MN} = \mathbf{G}_{WMN} \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{G}_{WMN} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T)^{-1} \quad (269)$$

La pratique la plus courante dans le domaine des neurosciences (Grave de Peralta et al., 2009) est d'utiliser une matrice \mathbf{W} diagonale dont les composantes sont les normes Euclidiennes ordinaires des colonnes de la matrice \mathbf{L} :

$$\mathbf{W} = \mathbf{diag}(\|\mathbf{L}_k^d\|) \text{ avec } \|\mathbf{L}_k^d\| = \sqrt{\mathbf{L}_k^{dT} \mathbf{L}_k^d} = w_k^d \text{ pour } d = 1, 2 \text{ ou } 3 \text{ et } k = 1, \dots, n \quad (270)$$

En se souvenant que \mathbf{L}_k^d représente le vecteur des mesures que l'on observerait si une source unique, ponctuelle, d'intensité 1, de direction \mathbf{e}_d , était localisée sur le nœud de coordonnée \mathbf{x}_k on comprend que plus \mathbf{x}_k se trouve dans les couches profondes du cerveau, plus les composantes du vecteur \mathbf{L}_k^d sont faibles. Cette pondération rétablit donc un équilibre entre les Lead Fields des couches superficielles et profondes du cerveau. Elle est notamment utilisée dans les méthodes ANA (Grave de Peralta et al., 2009) et EPIFOCUS (Grave de Peralta et al., 2001). Dans la première, l'opérateur inverse utilisé est le transposé de la matrice \mathbf{L} pondérée :

$$\mathbf{G}_{ANA} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} (w_1^1)^{-1} \mathbf{L}_1^{1T} \\ (w_1^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \\ (w_1^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \\ \vdots \\ (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_n^{1T} \\ (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_n^{2T} \\ (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_n^{3T} \end{bmatrix} \quad (271)$$

Evidemment, \mathbf{G} ne vérifie que les deuxièmes et troisièmes conditions de Penrose. D'après la terminologie de Ben-Israel and Greville (2003), ce n'est donc qu'un "(2,3)-generalized inverse" de \mathbf{L} . Cependant, la matrice de résolution obtenue est la forme :

$$\mathbf{GL} = \begin{bmatrix} w_1^1 & (w_1^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1^2 & (w_1^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_1^3 & \cdots & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_n^1 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_n^2 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_1^T \mathbf{L}_n^3 \\ (w_1^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{L}_1^1 & w_1^2 & (w_1^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{L}_1^3 & \cdots & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{L}_n^1 & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{L}_n^2 & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_1^{2T} \mathbf{L}_n^3 \\ (w_1^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{L}_1^1 & (w_1^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{L}_1^2 & w_1^3 & \cdots & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{L}_n^1 & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{L}_n^2 & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_1^{3T} \mathbf{L}_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & w_n^1 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_n^T \mathbf{L}_n^2 & (w_n^1)^{-1} \mathbf{L}_n^T \mathbf{L}_n^3 \\ & & & & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_n^{2T} \mathbf{L}_n^1 & w_n^2 & (w_n^2)^{-1} \mathbf{L}_n^{2T} \mathbf{L}_n^3 \\ & & & & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_n^{3T} \mathbf{L}_n^1 & (w_n^3)^{-1} \mathbf{L}_n^{3T} \mathbf{L}_n^2 & w_n^3 \end{bmatrix} \quad (272)$$

On montre facilement que les termes diagonaux w_k^d sont supérieurs ou égaux aux autres termes de leurs colonnes. Ainsi, ANA possède la même propriété que la méthode RENORMID (c.à.d. qu'elle permet de localiser les sources uniques, ponctuelles, dont la direction correspond à l'un des trois axes du repère cartésien). Cependant, contrairement à RENORMID, $\boldsymbol{\mu}$ n'est pas contraint à être dans $R(\mathbf{L})$. On a donc une estimation des mesures qui est de la forme $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{LW}^{-1} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\mu}$ et une matrice de résolution des données $\mathbf{LW}^{-1} \mathbf{L}^T \neq \mathbf{I}_m$. Une autre méthode qui utilise la pondération (270) est EPIFOCUS qui a été développée par Grave de Peralta et al. (2001), afin de localiser les foyers épileptiques (que l'on peut assimiler à des sources ponctuelles uniques, de directions quelconques). Pour cela :

- la matrice des Lead Fields pondérés $\mathbf{T} = \mathbf{LW}^{-1}$ est représentée sous la forme d'une matrice constituée de n blocs $\mathbf{T}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k^{-1}$, de dimension $m \times 3$, soit $\mathbf{T} = [\mathbf{T}_1 \quad \mathbf{T}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{T}_n]$,
- on construit les n blocs, de dimension $3 \times m$, de l'opérateur inverse \mathbf{G}_{EPI} en calculant les pseudo-inverses des blocs \mathbf{T}_k , notés \mathbf{T}_k^+ :

$$\mathbf{G}_{EPI} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^+ \\ \mathbf{T}_2^+ \\ \vdots \\ \mathbf{T}_n^+ \end{bmatrix} \quad (273)$$

Ainsi, en chaque point du domaine, on obtient un vecteur estimé $\hat{\mathbf{j}}_{EPI}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{T}_k^+ \boldsymbol{\mu}$ dont la norme est généralement interprétée comme étant la probabilité qu'une source localisée se trouve en ce point. Le résultat final est assez similaire à celui obtenu avec notre méthode RENORM_param.

Enfin, on peut noter que Gorodnitsky et Rao (1995) ont développé une autre méthode, dénommée FOCUSS, basée sur une méthode de pondération originale. Elle utilise la solution de norme minimale écrite sous la forme

$$\mathbf{J}_{MN} = \mathbf{W}^{-1/2} (\mathbf{L}\mathbf{W}^{-1/2})^+ \boldsymbol{\mu} \quad (274)$$

et calcule, de façon itérative, les composantes de la matrice \mathbf{W} à partir des solutions obtenues aux pas de temps précédents. Sous sa forme la plus utilisée, l'algorithme est décomposé en 3 étapes (l'indice « α » désigne le numéro de l'itération) :

- Etape 1 : $\mathbf{W}_\alpha^{-1/2} = \mathbf{W}_{\alpha-1}^{-1/2} \text{diag}(\mathbf{J}_{WMN\alpha-1})$
- Etape 2 : $\mathbf{q}_\alpha = (\mathbf{L}\mathbf{W}_\alpha^{-1/2})^+ \boldsymbol{\mu}$
- Etape 3 : $\mathbf{J}_{WMN\alpha} = \mathbf{W}_\alpha^{-1/2} \mathbf{q}_\alpha$

L'algorithme est initialisé en prenant $\mathbf{W}_0^{-1/2} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{J}_{WMN0} = \mathbf{J}_{MN}$. D'après la littérature, cette pondération donne de meilleurs résultats que ceux obtenus à l'aide de l'équation (270).

7.6.2 Solutions régularisées

Comme nous l'avons déjà évoqué au paragraphe 4.7, Grave de Peralta et Gonzalez-Andino (1999) montrent que les solutions régularisées s'expriment sous la forme générale :

$$\mathbf{J}_{GRMN} = \mathbf{G}_{GRMN} \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{G}_{GRMN} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T + \lambda^2 \mathbf{W}_m^{-1})^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (275)$$

où λ^2 est un paramètre de régularisation qu'il faut déterminer à l'aide d'approche adaptées (on remarque que l'on retrouve la solution (269) lorsque λ^2 tend vers 0).

- En prenant $\mathbf{W} = \mathbf{I}_{3n}$ et $\mathbf{W}_m = \mathbf{I}_m$ on obtient la solution de norme minimale régularisée (RMN) qui correspond à la solution de Tikhonov :

$$\mathbf{J}_{RMN} = \mathbf{G}_{RMN} \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{G}_{RMN} = \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{L}^T + \lambda^2 \mathbf{I}_m)^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (276)$$

- En prenant une des fonctions de pondération \mathbf{W} présentées au paragraphe précédent et en posant $\mathbf{W}_m = \mathbf{I}_m$ on obtient la solution de norme minimale pondérée régularisée (RWMN) :

$$\mathbf{J}_{RWMN} = \mathbf{G}_{RWMN} \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{G}_{RWMN} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T + \lambda^2 \mathbf{I}_m)^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (277)$$

Cependant, d'autres matrices peuvent être choisies. Par exemple, pour l'algorithme LORETA (Pascual-Marqui et al., 1994, 1999b), $\mathbf{W} = (\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{I}_3) \mathbf{\Delta}^T \mathbf{\Delta} (\mathbf{\Omega} \otimes \mathbf{I}_3)$, où \otimes est le produit de Kronecker, \mathbf{I}_3 la matrice identité de dimension 3, $\mathbf{\Delta}$ la matrice de l'opérateur Laplacien discret définie par Pascual-Marqui et al. (1994), et $\mathbf{\Omega}$ une matrice diagonale de dimension n dont les termes sont donnés par :

$$\Omega_{kk} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \mathbf{1}_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{1}_i(\mathbf{x}_k)}, k = 1, \dots, n \quad (278)$$

La même équipe (Pascual-Marqui, 2007, 2018), avec l'algorithme eLoreta (exact low resolution brain electromagnetic tomography), propose d'utiliser une matrice diagonale par blocs dont les blocs $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ vérifient :

$$\mathbf{W}_k = \left[\mathbf{L}_k^T (\mathbf{L} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{L}^T + \lambda^2 \mathbf{I}_m)^{-1} \mathbf{L}_k^T \right]^{1/2} \quad (279)$$

On s'aperçoit que, lorsque λ^2 tend vers 0, on retrouve les blocs obtenus par notre algorithme RENORM3D !

- Enfin, en prenant $\mathbf{W} = \mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{W}_m = \mathbf{Q}^{-1}$, où $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la matrice de covariance des erreurs de mesure et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ est la matrice de covariance des erreurs d'ébauche, on retrouve la solution Bayésienne (Dale et Sereno, 1993) :

$$\mathbf{J}_{BAY} = \mathbf{G}_{BAY} \boldsymbol{\mu} \text{ avec } \mathbf{G}_{BAY} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{L}^T (\mathbf{L} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{L}^T + \mathbf{Q}^{-1})^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (280)$$

7.7 Bilan de la section

Dans cette section, nous avons traité de l'adaptation de la méthode de renormalisation pour résoudre le « Neuroelectromagnetic Inverse Problem » : à partir des signaux EEG mesurés à la surface de crâne, il s'agit de déterminer la répartition spatio-temporelle des courants qui en sont la cause, à l'intérieur du cerveau.

Nous avons décrit la façon dont l'activité électrique du cerveau est modélisée et avons présenté la notion de Lead Field Functions. Nous avons ensuite montré comment obtenir, par analogie avec les résultats du paragraphe 3.2, les équations à partir desquelles ces fonctions peuvent être directement calculées.

Nous avons ensuite présenté le problème inverse neuro-électrique. D'un point de vue théorique, il est similaire (sous-déterminé) à celui que nous avons rencontré dans les sections précédentes. Cependant, il vise à reconstruire un champ de vecteurs (de dimension 3) dans un domaine (le cerveau) lui aussi tridimensionnel (on rappelle que le problème rencontré précédemment visait à reconstruire un champ scalaire). Ainsi avons-nous proposé des adaptations théoriques nécessaires à l'estimation de ce type de champs. En particulier, nous avons proposé la méthode RENORM3D, fiable et légère, qui permet de reconstruire, à partir de signaux EEG, des sources diffuses ou ponctuelles : (i) grâce à sa pondération, elle ne privilégie pas les sources situées près de la surface du crâne, (ii) dans le cas où les mesures proviennent d'une source ponctuelle, la norme de la densité de courant estimée est maximale, aux erreurs de mesures près, à l'emplacement de la source cherchée (propriété dite « zero dipole localization error »).

Enfin, nous avons replacé la méthode dans le contexte général de la résolution du problème inverse neuro-électrique. Nous avons constaté que la méthode trouvait sa place parmi celles construites à partir d'inverses généralisés. Nous avons également remarqué (en Août 2019, lors de la rédaction de cette section) que la méthode de pondération utilisée était similaire à celle utilisée par la méthode dénommée « eLoreta ». Il nous appartient donc maintenant de poursuivre le travail pratique de mise en œuvre ainsi que le travail théorique d'analyse des résultats.

8. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

8.1 Bilan

Dans ce mémoire, l'activité de recherche décrite a été réalisée au sein de l'équipe Mécanique des Fluides et Environnement du laboratoire de Mécanique et d'énergétique d' vry. Le thème de recherche se place dans le domaine des problèmes inverses et plus particulièrement dans celui de la résolution du problème d'estimation du terme source. Parmi les différentes applications de ce problème, celle qui consiste à caractériser la source d'émission d'un contaminant atmosphérique, à partir de mesures de concentrations effectuées par un réseau de capteurs, reste privilégiée. Nous nous sommes donc attachés prioritairement à développer une approche qui apporte, dans ce type de situations, une solution fiable, précise et rapide. Cette approche, nommée méthode de renormalisation, a été proposée dès 2005 par l'ingénieur en chef de l'armement J.P. Issartel. Des contrats de recherche avec la DGA Maitrise NRBC, nous ont donné l'occasion de participer activement à son développement. Des programmes de recherche menés en collaboration avec la PME Fluidyn ou l'IIT Delhi, mais aussi la thèse d'Hamza Kouichi, nous ont également permis de préparer sa mise en œuvre opérationnelle. Enfin, un projet soutenu par la SATT Paris-Saclay et l'IRBA nous a aidé à adapter la méthode à un autre domaine : celui du cerveau.

Ce cheminement permet de retrouver les principaux axes présentés au cours de cette habilitation avec, d'une part, des développements et analyses théoriques et, d'autre part, une approche pratique et une ouverture vers d'autres domaines d'application :

- Nous avons, dans la section 3.2, présenté le cadre théorique / mathématique dans lequel a été développée la méthode de renormalisation. Nous avons décrit ses principales propriétés et avons proposé plusieurs interprétations de la fonction de visibilité sur laquelle s'appuie la renormalisation.
- Dans la section 3.3, nous avons transposé le problème dans un domaine discret, puis nous avons proposé une solution renormalisée discrète associée à un algorithme performant pour la calculer. Nous avons également expliqué les propriétés de la méthode en utilisant le concept de matrice de résolution.
- Nous nous sommes ensuite intéressés, section 3.4, à la forme paramétrique du problème d'estimation du terme source et avons généralisé une méthode de résolution qui consiste

  réduire la dimension du domaine de recherche des paramètres de la source. Afin d'améliorer le crédit et l'utilité opérationnelle de cette approche, nous avons aussi proposé de nouvelles interprétations des résultats et développé une méthode d'évaluation de l'incertitude qui permet de tracer, sur les cartes de résultats, des régions de confiance.

- Avec la volonté de confronter les méthodes et algorithmes développés à la réalité, nous avons utilisé, section 3.5, des jeux de données expérimentaux. Dans des conditions similaires à son utilisation opérationnelle, nous avons montré l'efficacité de la méthode de renormalisation couplée avec des modèles de dispersion analytiques ou avec des modèles issus de la CFD. Nous avons ensuite montré que cette méthode pouvait être placée au cœur d'une plateforme logicielle de surveillance continue de sites sensibles. Elle peut également être utilisée pour évaluer l'efficacité de réseaux de surveillance existants ou pour en concevoir de nouveaux.
- Enfin, section 3.6, nous avons tenté d'élargir le domaine d'application de la méthode en l'utilisant pour résoudre le problème inverse neuro-électrique. Nous avons proposé les adaptations théoriques nécessaires à l'estimation d'un champ de vecteurs (de dimension 3) dans un domaine (le cerveau) lui aussi tridimensionnel. Nous avons développé l'approche RENORM3D, fiable et légère, qui permet de reconstruire, à partir de signaux EEG, les sources de courant à l'intérieur du cerveau et qui possède la propriété dite « zero dipole localization error ».

8.2 Perspectives

8.2.1 Perspectives sur la méthode

Analyse des erreurs d'observation

Pour fiabiliser le processus de détection et de caractérisation d'un rejet atmosphérique, il est important de préciser son degré d'incertitude. Cette incertitude dépend des erreurs de mesure, d'observation et de recalcul qui ont été décrites au paragraphe 3.3. En particulier, l'erreur d'observation (qui décrit l'écart entre un lot de concentrations effectivement mesurées et un lot analogue de concentrations modélisées) doit être caractérisée statistiquement par une loi de répartition dont les paramètres doivent être identifiés. Aussi avons-nous mené plusieurs études sur des données réelles et sur des données simulées. En utilisant le changement de variable de l'équation (149) nous avons vu, figure (16), que les mesures forment, en tous points du

domaine, un vecteur de la sphère unité dans l'espace des mesures. Cette géométrie sphérique a paru appropriée pour exprimer une loi statistique, de type Watson, caractérisée par un unique paramètre, κ , dit de dispersion, Mardia & Jupp (2009). Des expériences numériques ont été conduites, fondées sur la dispersion d'un traceur dans un écoulement turbulent, avec une turbulence homogène entretenue, calculé par le code GERRIS. Ces expériences, réalisées à l'aide des ressources informatiques des centres nationaux, ont permis de valider pour l'essentiel la loi proposée, voir par exemple figure 49. Il nous reste maintenant à finaliser l'analyse de tous les résultats et à valoriser le travail réalisé.

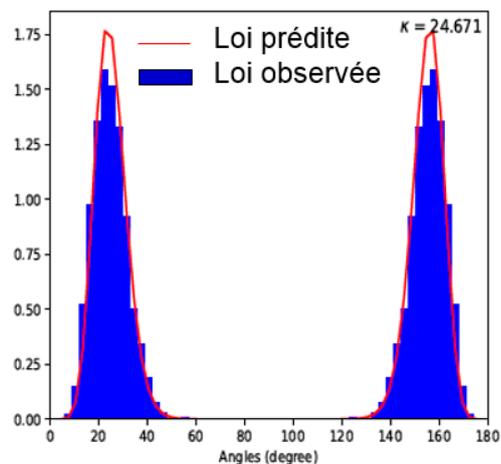


Fig. 49 : Variabilité angulaire du vecteur des concentration mesurées

Application au cerveau

Dans la section 3.6, nous avons adapté la méthode au contexte général de la résolution du problème inverse neuro-électrique. Nous avons constaté (i) que la méthode permettait de localiser correctement une source ponctuelle, (ii) que la méthode faisait intervenir, pour cela, une matrice de pondération diagonale par blocs et (iii) que la technique utilisée pour calculer cette matrice était similaire à celle utilisée par la méthode dénommée « eLoreta ». Il nous appartient donc maintenant de poursuivre le travail de validation sur données réelles et le travail théorique en

1. analysant le comportement de la méthode en présence de sources multiples simultanées (ce que ne permet pas eLoreta),
2. vérifiant si les interprétations physiques que nous avons présentées dans la section 3.2, s'appliquent également à la reconstruction de champs de vecteurs.

Nous pourrions, pour cela, nous rapprocher des développeurs de la méthode eLoreta. De plus, dans le cadre du projet RECREER, nous poursuivons le développement de la chaîne logicielle représentée figure 46. D'une part, nous adaptons actuellement un code de calcul développé par

l'équipe THE du LMEE afin de calculer, par la méthode des éléments finis, les Lead Field functions sur des modèles de crânes réalistes et/ou réels (travaux de S. Grosjean, LMEE). D'autre part, nous travaillons à la création semi-automatique de ces modèles à partir de l'imagerie IRM (travaux de Y. Cong, LMEE). Pour cela, nous nous basons sur des logiciels libres et/ou gratuits : ITK-SNAP pour la segmentation des images, Octave + TetGen pour la génération des maillages, ParaView pour la visualisation des données.

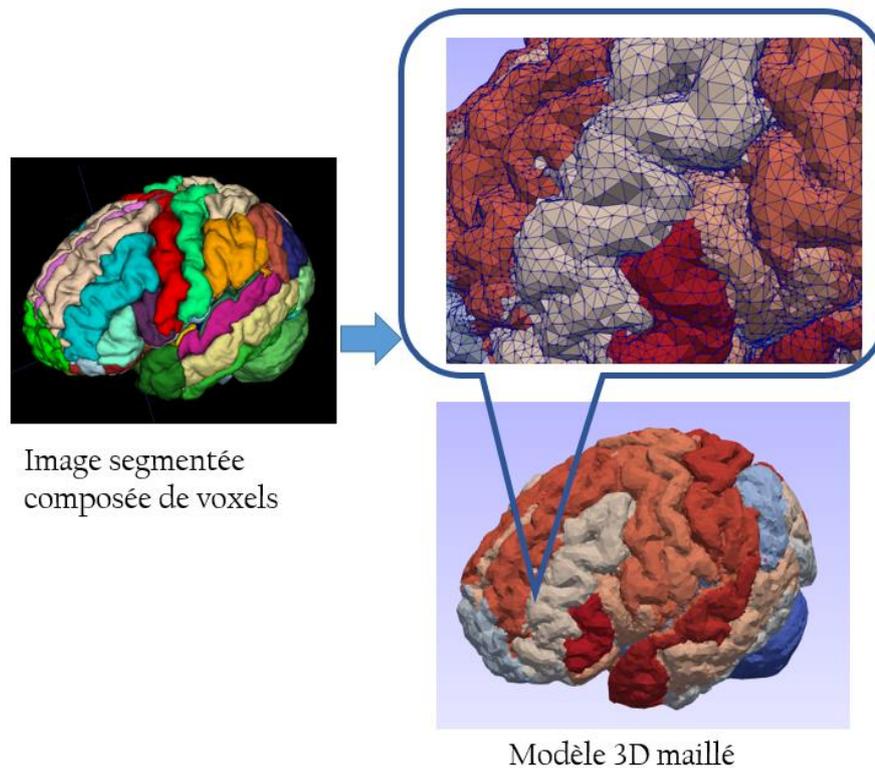


Fig. 50 : Maillage réalisé par Y. Cong, LMEE

8.2.2 Perspectives sur son application

Pour la surveillance de sites sensibles

La plateforme de démonstration développée dans le cadre du projet DISCARD, et décrite au paragraphe 6.2, constitue une première base prometteuse dans le cadre de la surveillance continue de sites sensibles. Elle permet, voir figure 51, de détecter d'éventuelles contaminations aériennes (accidentelles ou provoquées) : agression terroriste d'une zone accueillant du public, attaque de troupe sur un théâtre d'opération extérieur, fuite de gaz sur un site industriel. Cependant, elle nécessite encore un certain nombre d'améliorations pour un usage par des services de sécurité (Interface, traitement des cartographies, mise en valeur des résultats, base de données météo plus réaliste...). Ce travail ne pourra être mené qu'en étroite collaboration avec la PME Fluidyn.

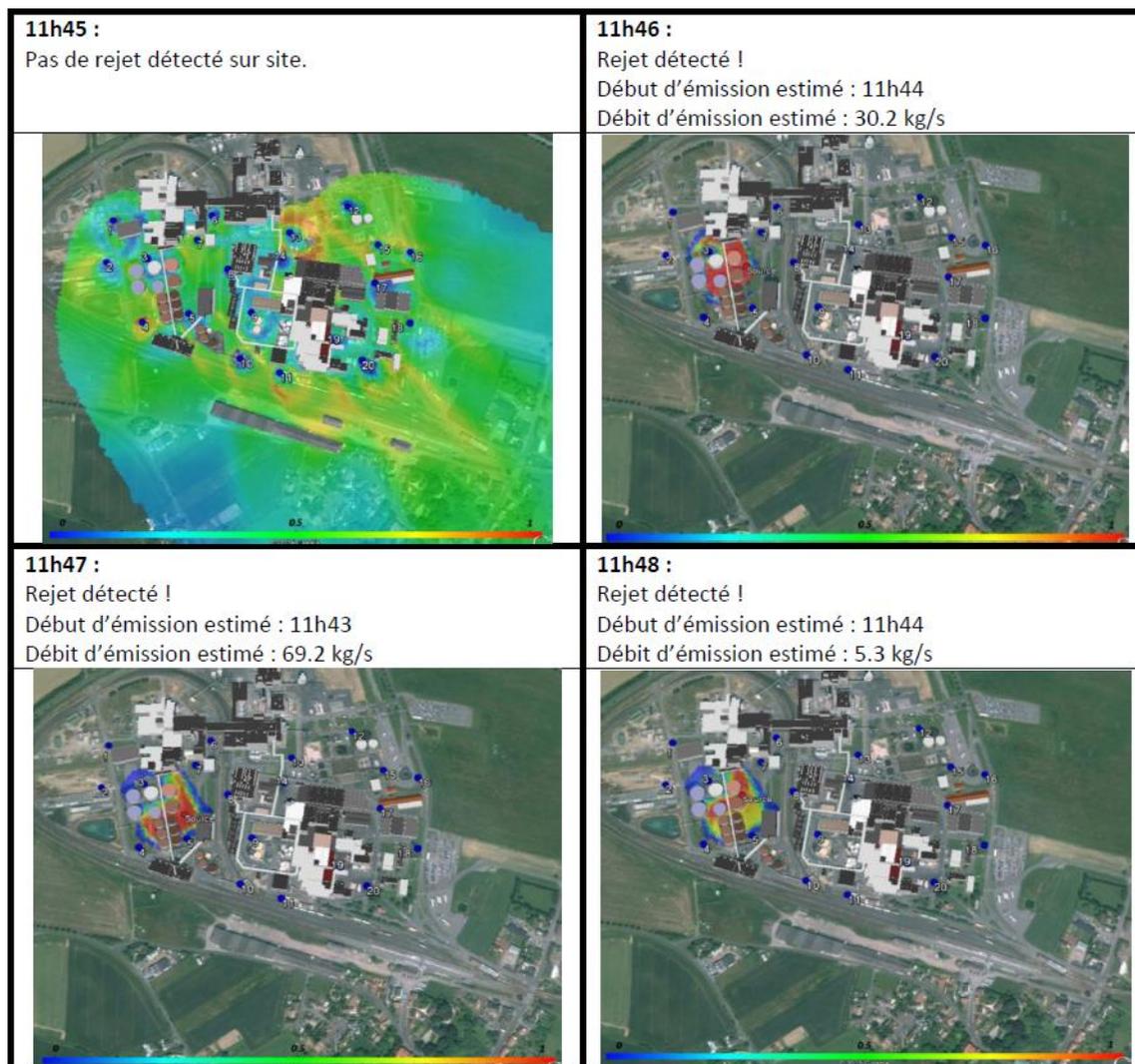


Fig. 51 : Plateforme de démonstration Fluidyn

Pour le traitement des appels d'urgence

Lors d'un stage proposé en 2018, nous avons cherché à savoir s'il était possible de localiser, en utilisant la méthode de renormalisation, l'origine d'un incident industriel à partir d'appels passés par les riverains aux services de secours. Pour cela, nous avons exploité des données recueillies lors d'une fuite de gaz toxique à la raffinerie de Grandpuits (77), le 01 mars 2018. Les services de secours (SDIS 91) et GRTgaz ont reçus, dans la matinée, plusieurs centaines d'appels signalant une forte Odeur de gaz, voir figure 52. Il s'agissait, en fait, d'une fuite d'Hydrogène Sulfuré qui n'a été signalée par l'industriel que 4h après les premiers appels. La principale difficulté a été de trouver une équivalence entre des sensations subjectives (odeurs de gaz) et des valeurs de concentration à inverser. Pour cela, nous avons supposé que les concentrations (i) variaient entre les valeurs min et max du seuil de détection olfactif, (ii) décroissaient proportionnellement au carré de la distance par rapport à la position de la première mesure sous le vent du rejet (celle située le plus à l'Est dans notre cas). Les premiers résultats

obtenus (sur des lots partiels de données) montrent que la méthode est capable d'estimer la position du rejet de façon suffisamment précise pour que la responsabilité de l'industriel soit rapidement démontrée.

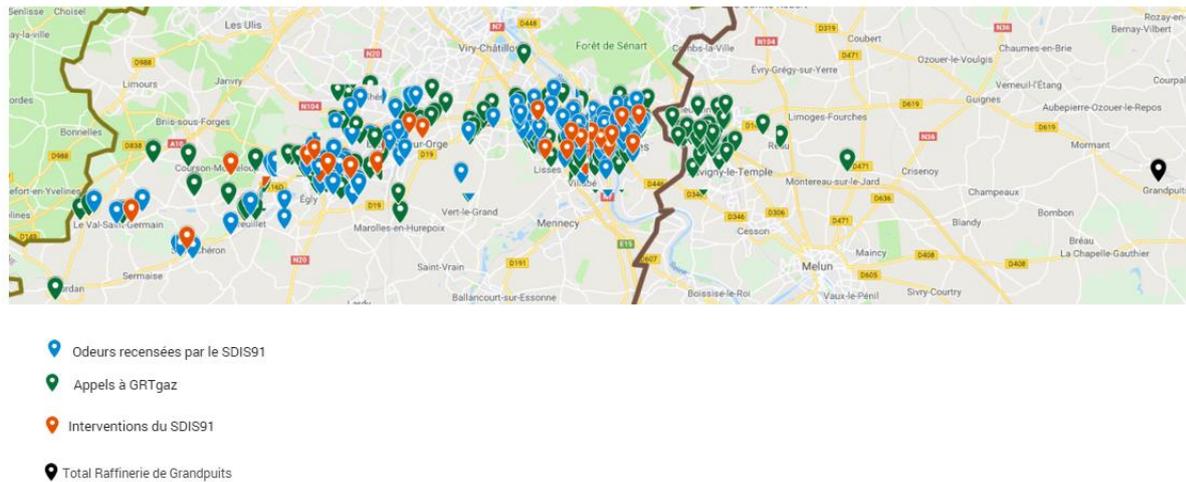


Fig. 52 : Cartographie statique des appels reçus par les services d'urgence

Il nous reste à finaliser les travaux en exploitant l'ensemble des appels, à formaliser l'approche et à la valider sur d'autres cas réels.

Pour le déploiement de réseaux mobiles

Aujourd'hui, la surveillance des installations industrielles est principalement réalisée par des réseaux de capteurs fixes (on parle alors de réseau statique), placés dans l'environnement proche des sites à surveiller (de façon à détecter au plus tôt les contaminations aériennes). Ces réseaux de capteurs récoltent de manière autonome, et transmettent en temps réel, des mesures de concentration. Au cours des dernières années, grâce aux progrès technologiques en matière de communication (sans fil), de détection (diminution de la taille et des coûts des micro-capteurs) et de robotique, les robots aériens ont été utilisés pour surveiller de larges zones géographiques. Dotés d'imageurs et de capteurs optroniques performants (caméra HD, caméra thermique, détecteur infrarouge, télémètre laser, etc.), ils permettent d'effectuer efficacement, et silencieusement, des missions de surveillance. Récemment, ce type de robots a également été utilisé pour la surveillance de la qualité de l'air, la détection des matières dangereuses et la recherche de sources. L'idée qui émerge actuellement est de déployer, au vent des sites à surveiller, des flottes de robots aériens, équipés de capteurs adaptés (charges utiles) pour mesurer des concentrations de produits chimiques. Chaque robot constitue alors un nœud d'un réseau de surveillance mobile dont la configuration peut être modifiée à chaque instant. Les avantages des réseaux mobiles adaptatifs sont multiples : ils peuvent être déployés rapidement, s'adapter aux conditions météorologiques observées en temps réel et être configurés pour

répondre à de multiples objectifs. Le problème auquel nous souhaitons prochainement nous intéresser consiste à déterminer les trajectoires et positions des drones de la flotte afin de fournir des mesures pertinentes pour la caractérisation d'éventuelles sources d'émissions. En effet, la résolution d'un problème inverse à partir de données recueillies par des véhicules aériens sans pilote (UAVs) est une tâche difficile qui soulève de nombreuses questions fondamentales sur les stratégies optimales de collecte d'information et pourrait constituer un bon sujet de thèse.

9. BIBLIOGRAPHIES

9.1 Bibliographie de l'auteur

9.1.1 *Liste des articles publiés dans revues internationales à comité de lecture*

- [A1] **Turbelin, G.**, Gibert R.J. (2002). CFD calculations of indicial lift responses for bluff bodies. *Journal of Wind and Structures*, 5(2-4), 245-256. Doi:10.12989/was.2002.5.2_3_4.245
- [A2] Feng, Z. Q., Cros, J. M., Renaud, C., & **Turbelin, G.** (2008). Identification of the dissipated energy by friction in dynamic multibody systems. *International Journal for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization*, 2(3), 193-197. Doi:10.1051/ijsmdo:2008026
- [A3] **Turbelin, G.**, Ngae, P., & Grignon, M. (2009). Wavelet cross-correlation analysis of wind speed series generated by ANN based models. *Renewable Energy*, 34(4), 1024-1032. Doi:10.1016/j.renene.2008.08.016
- [A4] **Turbelin, G.**, Ngae, P., & Balde, H. (2012). Estimates of lateral dispersion parameters in low wind speed conditions. *International Journal of Environment and Pollution*, 50(1), 441-450. Doi:10.1504/IJEP.2012.051214
- [A5] **Turbelin, G.**, Singh, S. K., & Issartel, J. P. (2014). Reconstructing source terms from atmospheric concentration measurements: Optimality analysis of an inversion technique. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 6, 1244–1255. Doi:10.1002/2014MS000385.
- [A6] Singh, S. K, **Turbelin, G.**, Issartel, J.-P. , Kumar, P., and Feiz, A. A. (2015). Reconstruction of an atmospheric tracer source in fusion field trials: Analysing resolution features, *J. Geophys. Res. Atmos.*, 120. Doi:10.1002/2015JD023099
- [A7] Kumar, P., Feiz, A. A, Singh, S. K., Ngae, P. and **Turbelin, G.** (2015). Reconstruction of an Atmospheric Tracer Source in an Urban like Environment, *J. Geophys. Res. Atmos.*, 120, 12589–12604. Doi:10.1002/2015JD024110.
- [A8] Singh, S. K, P. Kumar, **G. Turbelin**, and A. R. Rani (2016). Uncertainty characterization in the retrieval of an atmospheric point release, *Atmospheric Environment*, vol. 152, pp. 34–50. Doi: 10.1016/j.atmosenv.2016.12.016.
- [A9] Singh, S. K., P. Kumar, R. Rani and **G. Turbelin**, (2017). Comparative interpretations of renormalization inversion technique for reconstructing unknown emissions from measured atmospheric concentrations. *Earth and Space Science*, 4(4), 184-199. Doi:10.1002/2016EA000247

- [A10] Kumar, P., Singh, S. K., Feiz, A. A, Ngae, P. and **Turbelin, G.** (2017). Assessment of a CFD Model for Short-Range Plume Dispersion: Applications to the Fusion Field Trial 2007 (FFT-07) Diffusion Experiment, Atmospheric Research, 197, pp.84- 93. Doi:10.1016/j.atmosres.2017.06.025.
- [A11] **Turbelin, G.**, Singh, S., Ngae, P., & Kumar, P. (2018). An optimization-based approach for source term estimations of atmospheric releases. Earth and Space Science, 5. Doi.org/10.1029/2018EA000444
- [A12] **Turbelin, G.**, Singh, S., Issartel, J. P., Busch, X., & Kumar, P. (2019). Computation of Optimal Weights for Solving the Atmospheric Source Term Estimation Problem. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology, 36(6), 1053-1061, doi.org/10.1175/JTECH-D-18-0145.1
- [A13] Singh, S. K., **Turbelin, G.**, & Issartel, J. P. (2019). Characterizing Variations in Concentration Data Measured from Unknown Releases. Earth and Space Science. Doi.org/10.1029/2019EA000669

9.1.2 *Liste des actes publiés de conférences internationales, congrès et colloques...*

- [C1] **G. Turbelin**, R.J. Gibert, G. Porcher (1996). Motion of a 2 degree of freedom structure in the presence of a fluid-elastic force. ASME Pressure Vessels & Piping Conference, Montreal, Canada, July 21-26 1996.
- [C2] **G. Turbelin**. Modélisation de la turbulence atmosphérique en vue de l'étude de l'action du vent sur les structures. Choix d'un modèle de turbulence (1999). 14ème congrès français de mécanique AFM-AUM, Toulouse, France; 9 août - 3 septembre 1999.
- [C3] **G. Turbelin**, R.J. Gibert (2000). CFD calculation of Küssner-type indicial functions for buffeting analysis of bluff bodies. Fourteenth Engineering Mechanics Conference (EM2000), ASCE, Austin Texas, USA May 21-24 2000
- [C4] **G. Turbelin**, R.J. Gibert (2000). CFD Calculations to improve buffeting analysis of bluff bodies. 3rd International Symposium on Computational Wind Engineering, Birmingham, England, 4-7 September 2000
- [C5] J. Citérin, **G. Turbelin**, A. Kheddar, F. Vidal, C. Chevrot (2005). New design methods and simulation of linear actuators using ionic polymers. International Conference on Robotics and Biomimetics ROBIO, Honk Kong, China, 29 Juin-03 Juillet 2005.
- [C6] **G. Turbelin**, P. Ngae, M. Grignon (2005). Reconstruction de séries temporelles représentatives du vent, application à l'excitation de structures. 17ème Congrès Français de Mécanique, Troyes, Septembre 2005

- [C7] Bekka N., Sellam M., **Turbelin G.**, Chpoun A. (2011), Fluid-Structure interaction for a flexible over expanded rocket nozzle using the aeroelastic stability model, ISSW 28, Manchester UK, 17 - 22 July 2011
- [C8] H. Balde, **G. Turbelin**, P. Ngae (2011), Two methods to estimate the standard deviation of lateral dispersion in low wind stable conditions, Proceedings of the 14th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes (HARMO14), Kos (Greece), October 2-6, 2011
- [C9] S. K. Singh, M. Sharan, J. P. Issartel, A. K. Singh, **G. Turbelin**, A. A. Feiz, E. Barbosa and P. Ngae (2013), Reconstructing the height of an elevated point release in low wind stable conditions, Proceedings of the 15th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes (HARMO15), Madrid, Spain, 6-9 May, pp. 660-664.
- [C10] Bekka N., Sellam M., **Turbelin G.**, Chpoun A. (2013), Fluid structure interaction phenomena in highly over-expanded rocket nozzle, 11th International Conference of Fluid Dynamics, Alexandria, Egypt, 19-21 December 2013
- [C11] **G. Turbelin**, S.K. Singh, H. Kouichi, N. Bostic, A. A. Feiz, P. Ngae, E. Barbosa, J-P. Issartel (2014) A fast reliable algorithm for point source localization, application to a new kitfox data. Proceedings of the 16th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes (HARMO16), Varna, Bulgaria, 8-11 Sept. 2014
- [C12] S. K. Singh, **G. Turbelin**, J-P. Issartel, A. A. Feiz, P. Ngae, E. Barbosa, P. Kumar (2014) Point Source Reconstruction : Analyzing Localization Features of a Weighted Least-Squares Technique, Proceedings of the 16th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes (HARMO16), Varna, Bulgaria, 8-11 Sept. 2014
- [C13] P. Kumar, A. A. Feiz, P. Ngae, E. Barbosa, **G. Turbelin**, S.K. Singh, D. Joseph, J-P. Issartel (2014) Applications of a CFD Model for Short-Range Pollutant Dispersion and Source Reconstruction in an Urban Environment, Proceedings of the 16th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes (HARMO16), Varna, Bulgaria, 8-11 Sept. 2014
- [C14] P. Kumar, A. A. Feiz, P. Ngae, E. Barbosa, S.K. Singh, D. Joseph, **G. Turbelin**, J-P. Issartel (2015) A Point Source Reconstruction in an Urban like Environment, European Geosciences Union General Assembly 2015, Vienna, Austria, 12 – 17 April 2015
- [C15] S. K. Singh, **G. Turbelin**, J-P. Issartel, A. A. Feiz (2015) Reconstruction of Atmospheric Tracer Releases with Optimal Resolution Features: Concentration Data Assimilation, European Geosciences Union General Assembly 2015, Vienna, Austria, 12 – 17 April 2015

- [C16] S. K. Singh, **G. Turbelin**, P. Kumar, R. Rani, A.A. Feiz, P. Ngae, J-P. Issartel (2016) Uncertainty estimation in the reconstruction of atmospheric tracer source emissions, 17th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes (HARMO17), Budapest, Hungary, 9-13 May 2016
- [C17] P. Kumar, A-A. Feiz, S. K. Singh, P. Ngae, R. Rani, E. Barbosa, **G. Turbelin**, J-P. Issartel, N. Bekka (2016) Source reconstruction in urban and non-urban environments using an inversion methodology coupled with a CFD approach, 17th International Conference on Harmonisation within Atmospheric Dispersion Modelling for Regulatory Purposes (HARMO17), Budapest, Hungary, 9-13 May 2016
- [C18] H. Kouichi, **G. Turbelin**, P. Ngae, A. A. Feiz, E. Barbosa & A. Chpoun (2016) Optimization of sensor networks for the estimation of atmospheric pollutants sources, 24th International Conference on Modelling, Monitoring and Management of Air Pollution (AIR 2016)
- [C19] Pramod Kumar, Sarvesh Kumar Singh, Amir-Ali Feiz, Pierre Ngae, **Grégory Turbelin**, Jean-Pierre Issartel (2017) Retrieval of the unknown elevated emissions in urban environments using building resolving CFD approach, 4th International Conference on Atmospheric Sciences and Application to Air Quality, Stasbourg, France, 29-31 May 2017

9.1.3 *Liste de conférences, workshop ou séminaires*

- [W1] Turbelin G., « Détermination des fonctions indicielles de l'effet rafale de structures élancées soumises aux effets du vent ». Journée Club CASTEM 2000, 28 octobre 1999.
- [W2] Turbelin G., Feng Z.-Q. et Cros J.-M., « Compatibilité CAST3M - FER/VIEW ». Journée Club CAST3M, Paris, 3 décembre 2002.
- [W3] Turbelin G., « Source localization from atmospheric concentration measurements: Inverse modelling approach ». Centre for Atmospheric Sciences, IIT Delhi, 17 octobre 2014.
- [W4] Turbelin G., Bostic N. , « Atmospheric Transport and Dispersion Data Sets for Source Identification ». Colloque « Modélisation de la dispersion atmosphérique, Identification de source, Qualité de l'air », 10 juin 2013, Evry, France
- [W5] Turbelin G., S. K. Singh, H. Kouichi, P. Kumar, A. A. Feiz, P. Ngae, J.P. Issartel, « A reliable method for point source localization: Evaluation with some data sets ». Workshop Européen "Modelling the dispersion of toxic industrial chemicals in urban environments" (MODITIC), INERIS Verneuil en Halatte, 19 septembre 2014.
- [W6] Kouichi, Turbelin G., P. Ngae, A. Chpoun « Optimisation d'un réseau de capteurs pour l'identification de sources ». Deuxième colloque « Modélisation de la dispersion atmosphérique, Identification de source », Evry, France, 3 juin 2015

- [W7] G. Turbelin, S. Singh « Uncertainties in inverse problems ». Workshop Européen « MODITIC », DGA Vert le petit, 29 septembre 2015.
- [W8] Turbelin G., « Parameterization of lateral plume dispersion in extremely low wind conditions ». Centre for Atmospheric Sciences, IIT Delhi, mars 2017.
- [W9] Mathé J., Turbelin G., De la détection d'un polluant à l'identification de sa source, SPI-2, Université d'Evry, 3 mai 2018
- [W10] Issartel, J.-P., Turbelin G., « Erreur de représentativité: vérification d'une hypothèse statistique par expérience numérique ». Ateliers de Modélisation de l'Atmosphère 2019, Météo-France à Toulouse, 11-13 Mars 2019.

9.2 Bibliographie générale

Abida, R., Bocquet, M., Vercauteren, N., & Isnard O. (2008), Design of a monitoring network over France in case of a radiological accidental release, *Atmos. Environ.*, 42, 5205–5219.

Allen, C.T., Young, G.S., & Haupt, S. E. (2007), Improving pollutant source characterization by better estimating wind direction with a genetic algorithm, *Atmos. Environ.*, 41, 2283–2289.

Anfossi, D., Alessandrini, S., Trini Castelli, S., Ferrero, E., Oetl, D., & Degrazia, G. (2006), Tracer dispersion simulation in low wind speed conditions with a new 2-D Langevin equation system, *Atmos. Environ.*, 40, 7234-7245.

Annunzio, A. J., Young, G. S., & Haupt, S. E. (2012), Utilizing state estimation for the source term estimation of a contaminant, *Atmos. Environ.*, 46, 580–589, doi:10.1016/j.atmosenv.2011.04.080.

Awan, F. G., Saleem, O., & Kiran, A. (2018), Recent trends and advances in solving the inverse problem for EEG source localization. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 1-16.

Backus G., & Gilbert J.F. (1967), Numerical applications of a formalism for geophysical inverse problems. *Geophys J R Astron Soc* 13:247–276.

Backus, G. E., & Gilbert, J. F. (1968), The resolving power of gross Earth data, *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 16, 169–205.

Backus, G., & F. Gilbert, J. F. (1970), Uniqueness in the inversion of inaccurate gross Earth data, *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, 266(1173), 123–192.

Bates, D. M., & Watts, D. G. (1988), *Nonlinear regression analysis and its applications* (Vol. 2), New York: Wiley.

Ben-Israel, A., & Greville, T.N.E. (2003), *Generalized Inverses: Theory and Applications*, Springer, New York.

Bertero, M., De Mol, C., & Pike, E.R. (1985), Linear inverse problems with discrete data: I - General formulation and singular system analysis, *Inverse Problems*, 1, 301-330, doi:10.1088/0266-5611/1/4/004.

Bertero, M., De Mol, C., & Pike, E. R. (1988), Linear inverse problems with discrete data: II. Stability and regularisation. *Inverse problems*, 4(3), 573.

- Biltoft, C. A. (2002), Customer report for Mock Urban Setting Test, Meteorology and Obscurants Division, West Desert Test Center, U.S. Army Dugway Proving Ground, DPG Document WDTC_FR-01-121, 58 pp.
- Blum, C., & Roli, A. (2003), Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison, *ACM Computing Surveys*, 35(3), 268-308.
- Bocquet, M. (2005), Reconstruction of an atmospheric tracer source using the principle of maximum entropy. I: Theory, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 131(610), 2191–2208, doi:10.1256/qj.04.67.
- Busch, X. (2015), Renormalized data assimilation : an entropic approach. Deuxième colloque sur la Modélisation de la dispersion atmosphérique, Identification de source, Evry, France.
- Chang, J. C., & Hanna, S. R. (2004), Air quality model performance evaluation. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 87(1-3), 167-196.
- Chang, J., Hanna, S. R., & Kennebunkport, M. (2010), Modelers' data archive-a collection of atmospheric transport and dispersion data sets. American Meteorological Society.
- Coulombe, W., Bowen, J., Egami, R., Freeman, D., Sheesley, D., Nordin, J., Routh, T. & King, B. (1999), Characterization of Carbon Dioxide Releases–Experiment Two, DRI Doc. No. 97-7240.F, DRI, Reno, NV.
- Crowley, C. W., Greenblatt, R. E., & Khalil, I. (1989), Minimum norm estimation of current distributions in realistic geometries. In *Advances in Biomagnetism* (pp. 603-606), Springer, Boston, MA.
- Dale, A. M., & Sereno, M. I. (1993), Improved localizadon of cortical activity by combining EEG and MEG with MRI cortical surface reconstruction: a linear approach. *Journal of cognitive neuroscience*, 5(2), 162-176.
- Draper, N.R., & Smith, H. (1998), *Applied Regression Analysis*, 3rd Edition, John Wiley & Sons.
- Draxler, R. R., Heffter, J. L., & Rolph, G. D. (2001), Data Archive of Tracer Experiments and Meteorology.

Gorodnitsky, I. F., & Rao, B. D. (1997), Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: A re-weighted minimum norm algorithm. *IEEE Transactions on signal processing*, 45(3), 600-616.

Grave de Peralta Menendez, R. & Andino, S. G. (1999), Distributed source models: standard solutions and new developments. In *Analysis of neurophysiological brain functioning* (pp. 176-201), Springer, Berlin, Heidelberg.

Grave de Peralta Menendez, R. G., Andino, S. G., Lantz, G., Michel, C. M., & Landis, T. (2001), Noninvasive localization of electromagnetic epileptic activity. I. Method descriptions and simulations. *Brain topography*, 14(2), 131-137.

Grave de Peralta Menendez, R. G., Murray, M. M., Michel, C. M., Martuzzi, R., & Andino, S. L. G. (2004), Electrical neuroimaging based on biophysical constraints. *Neuroimage*, 21(2), 527-539.

Grave de Peralta, R., O. Hauk, & S. L. Gonzalez (2009), The Neuroelectromagnetic Inverse Problem and the Zero Dipole Localization Error, *Computational Intelligence and Neuroscience*, 2009, 1-11 pages, doi:10.115.

Grech, R., Cassar, T., Muscat, J., Camilleri, K. P., Fabri, S. G., Zervakis, M., & Vanrumste, B. (2008), Review on solving the inverse problem in EEG source analysis. *Journal of neuroengineering and rehabilitation*, 5(1), 25.

Greenblatt, R. E., Ossadtchi, A., & Pflieger, M. E. (2005), Local linear estimators for the bioelectromagnetic inverse problem. *IEEE transactions on signal processing*, 53(9), 3403-3412.

Gryning, S. E., Holtslag, A. A. M., Irwin, J. S., & Sivertsen, B. (1987), Applied dispersion modelling based on meteorological scaling parameters. *Atmospheric Environment*, 21(1), 79-89.

Hadamard, J. (1923), *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, Yale University Press, New Haven.5/2009/659247.

Hämäläinen, M. S., & Ilmoniemi, R. J. (1994), Interpreting magnetic fields of the brain: minimum norm estimates. *Medical & biological engineering & computing*, 32(1), 35-42.

Hanna, S.R., & Chang, J.C. (2001), Use of the Kit Fox field data to analyze dense gas dispersion modeling issues, *Atmospheric Environment* 35, 2231-2242.

Hansen, P. C. (1992), Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve, *SIAM Rev.*, 34(4), 561–580, doi:10.1137/1034115.

Hansen, P. C. (2005), Rank-deficient and discrete ill-posed problems: numerical aspects of linear inversion (Vol. 4), Siam.

Haugen, D. A., & Barad, M. L. (Eds.), (1958), Project Prairie Grass, a field program in diffusion. Air Force Cambridge Research Center.

Heller, L., & Volegov, P. (2014), Electric and magnetic fields of the brain. In *Magnetoencephalography* (pp. 73-105), Springer, Berlin, Heidelberg.

Hourdin, F. & Issartel, J.-P. (2000), Sub-surface nuclear tests monitoring through the CTBT xenon network. *Geophys. Res. Lett.* 27, 2245–2248.

Hourdin, F., Talagrand, O., & Idelkadi, A. (2006), Eulerian backtracking of atmospheric tracers. II: Numerical aspects. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society: A journal of the atmospheric sciences, applied meteorology and physical oceanography*, 132(615), 585-603.

Hutchinson, M., Oh H., & Chen, W.H. (2017), A review of source term estimation methods for atmospheric dispersion events using static or mobile sensors, *Inf. Fusion*, 36, 130-148.

Issartel, J.-P. & Baverel J. (2003), Inverse transport for the verification of the Comprehensive Nuclear Test Ban Treaty, *Atmos. Chem. Phys.*, 3, 475-486, doi:10.5194/acp-3-475-2003.

Issartel, J.-P. (2005), Emergence of a tracer source from air concentration measurements: a new strategy for linear assimilation, *Atmos. Chem. Phys.* 5, 1, 249-273, doi:10.5194/acp-5-249-2005.

Issartel, J.-P., Sharan, M. & Modani, M. (2007), An inversion technique to retrieve the source of a tracer with an application to synthetic satellite measurements, *Proc. Royal Society A*, 463, 2863-2886, doi:10.1098/rspa.2007.1877.

Issartel, J.-P., Sharan, M., & Singh, S. K. (2011), Identification of a point of release by use of optimally weighted least squares, *Pure Appl. Geophys.*, 169, 467-482, doi:10.1007/s00024-011-0381-4.

Kern, M. (2002), Problèmes inverses : aspects numériques. Engineering school. 1999   2002,  cole supérieure d'ing nieurs L onard de Vinci.

Keats A., Yee E., & Lien, F.S. (2007), Bayesian inference for source determination with applications to a complex urban environment, *Atmos. Environ.*, 41, No. 3, 465–479.

Kirkpatrick, S., Gelatt Jr., C.D., & Vecchi M.P. (1983), Optimization by simulated annealing, *Science*, 220, 671–680.

Leitl, B., Castelli, S. T., Baumann-Stanzer, K., Reisin, T. G., Barmpas, P., Balczo, M., & Milliez, M. (2014), Evaluation of Air Pollution Models for Their Use in Emergency Response Tools in Built Environments: The ‘Michelstadt’ Case Study in COST ES1006 ACTION. In *Air Pollution Modeling and its Application XXIII* (pp. 395-399), Springer, Cham.

Lepley, J.J., Lloyd, D., Robins, A., Wilks, A., Rudd, A., & Belcher, S. (2011), Dynamic sensor deployment for the monitoring of chemical releases in urban environments (DYCE), *Proc. of SPIE*, 8018, 1-11, doi:10.1117/12.883373.

Lewis, J. M., Lakshmivarahan, S., & Dhall, S. (2006), *Dynamic Data Assimilation: A Least Squares Approach*, Cambridge University Press, Cambridge.

Liu, X., & Zhai, Z. (2007), Inverse modeling methods for indoor airborne pollutant tracking: literature review and fundamentals, *Indoor Air*, 17(6), 419–438, doi:10.1111/j.1600-0668.2007.00497.x.

Maillet, D. & Petit, D. (2008), Techniques inverses et estimation de paramètres. Partie 1. *Tech. Ing. Phys. Stat. Mathématique*, (af4515), 1-18.

Mallet, J.-C. (2008), *Défense et Sécurité nationale : le Livre blanc*, Odile Jacob : La Documentation française.

Marchuk, G. I. (1995), *Adjoint Equations and Analysis of Complex Systems*, Springer, Netherlands.

Malmivuo, P., Malmivuo, J., & Plonsey, R. (1995), *Bioelectromagnetism: principles and applications of bioelectric and biomagnetic fields*. Oxford University Press, USA.

Mardia, K. V., & Jupp, P. E. (2009). *Directional statistics* (Vol. 494). John Wiley & Sons.

Menke, W. (1984), *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, Academic Press, Massachusetts.

Menke, W. (2015), Review of the generalized least squares method. *Surveys in Geophysics*, 36(1), 1-25.

- Nielsen, M., & Ott, S. (1995), A collection of data from dense gas experiments. Risø National Laboratory.
- Morley, A., Hill, L., & Kaditis A.G. (2013), 10-20 EEG placement, European Respiratory Society.
- Olesen, H. R., & Chang, J. C. (2010), Consolidating tools for model evaluation. *International Journal of Environment and Pollution*, 4.
- Pascual-Marqui, R. D., Michel, C. M., & Lehmann, D. (1994), Low resolution electromagnetic tomography: a new method for localizing electrical activity in the brain. *International Journal of psychophysiology*, 18(1), 49-65.
- Pascual-Marqui, R. D. (1999a), Review of methods for solving the EEG inverse problem, *Int. J. Bioelectromagn.*, 1(1), 75–86.
- Pascual-Marqui, R. D., Lehmann, D., Koenig, T., Kochi, K., Merlo, M. C., Hell, D., & Koukkou, M. (1999b), Low resolution brain electromagnetic tomography (LORETA) functional imaging in acute, neuroleptic-naive, first-episode, productive schizophrenia. *Psychiatry Research: Neuroimaging*, 90(3), 169-179.0(1), 175.
- Pascual-Marqui, R. D. (2002), Standardized low-resolution brain electromagnetic tomography (sLORETA): technical details. *Methods Find Exp Clin Pharmacol*, 24(Suppl D), 5-12.
- Pascual-Marqui, R. D. (2007), Discrete, 3D distributed, linear imaging methods of electric neuronal activity. Part 1: exact, zero error localization. arXiv preprint arXiv:0710.3341.
- Pascual-Marqui, R. D., Faber, P. L., Kinoshita, T., Kochi, K., Milz, P., Nishida, K., & Yoshimura, M. (2018), Comparing EEG/MEG neuroimaging methods based on localization error, false positive activity, and false positive connectivity. *bioRxiv*, 269753.
- Penrose, R. (1955), A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3), 406–413, doi:10.1017/S0305004100030401.
- Platt, N., & Deriggi, D., 2010. Comparative investigation of source term estimation algorithms using Fusion Field Trial 2007 data. In: 8th Conference on Artificial Intelligence Applications to Environmental Sciences at AMS Annual Meeting, Atlanta.
- Pudykiewicz, J.A. (1998), Application of adjoint tracer transport equations for evaluating source parameters. *Atmos. Environ.* 32.

Rao, K. S. (2007), Source estimation methods for atmospheric dispersion, *Atmos. Environ.*, 41, 6964-6973, doi:10.1016/j.atmosenv.2007.04.064.

Rodgers, CD. 2000. Inverse methods for atmospheric sounding: theory and practice. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, ISBN 978-981-02-2740-1, 85 pp.

Rudd, A. C., Belcher, S. E., Robins, A. G., & Lepley J.J. (2012), An Inverse Method for Determining Source Characteristics for Emergency Response Applications, *Boundary-Layer Meteorology*, 144, 1-20, doi:10.1007/s10546-012-9712-y.

Sagendorf, J.F., & Dickson, C.R. (1974), Diffusion under low wind-speed, inversion conditions, U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration Technical Memorandum ERL ARL-52.

Sapolin, B. (2011), Construction d'une méthodologie d'évaluation statistique des logiciels de dispersion atmosphérique utilisés en évaluation de risque NRBC et développement d'un modèle d'estimation de l'incertitude des résultats, Thèse de doctorat, Paris 11.

Senocak, I. (2010), Application of a Bayesian inference method to reconstruct short-range atmospheric dispersion events, in AIP Conference. Proceedings, vol. 1305.1, pp. 250–257, Am. Inst. of Phys., Chamonix, France.

Sharan, M., Singh, M.P., & Yadav, A.K. (1996), A mathematical model for the atmospheric dispersion in low winds with eddy diffusivities as linear functions of downwind distance, *Atmospheric Environment*, 30, 1137-1145, doi:10.1016/1352-2310(95)00368-1.

Sharan, M., Modani, M., & Yadav, A.K. (2003), Atmospheric dispersion: an overview of mathematical modelling framework, *Proceedings Indian National Science Academy Part A*, 69(6), 725-744.

Sharan, M., Issartel, J.-P., Singh, S.K., & Kumar, P. (2009), An inversion technique for the retrieval of single point emissions from atmospheric concentration measurements, *Proceedings of the Royal Society A*, 65, 2069-2088, doi:10.1098/rspa.2008.0402.

Sharan, M., Singh, S. K., & Issartel, J.-P. (2011), Least Squares Data Assimilation for identification of the point source of emissions, *Pure Appl. Geophys.*, 169, 483-497, doi:10.1007/s00024-011-0382-3.

Sharan, M., Issartel, J.-P., & Singh, S. K. (2012), A point-source reconstruction from concentration measurements in low-wind stable conditions, *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 138, 1884–1894, doi:10.1002/qj.1921.

Siarry, P. (2014), *M taheuristiques*. Editions Eyrolles.

Singh, S. K., & Rani, R. (2014), A least-squares inversion technique for identification of a point release: Application to Fusion Field Trials 2007, *Atmos. Environ.*, 92, 104-117. DOI: 10.1002/qj.2446.

Singh, S. K., Sharan, M., & Issartel, J. P. (2015), Inverse modelling methods for identifying unknown releases in emergency scenarios: an overview. *International Journal of Environment and Pollution*, 57(1-2), 68-91.

Storwald, D.P. (2007), Detailed test plan for the fusing sensor information from observing networks (Fusion) Field Trial (FFT-07), Tech. Rep. WDTC-TP-07-078, West Desert Test Center, U.S. Army Dugway Proving Ground, Utah.

Tarantola, A. (2005), *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, 348 pp., doi:10.1137/1.9780898717921.

Thacker, W.C. (1989), The role of the hessian matrix in fitting models to measurements. *J. Geophys. Res. Oceans*, 94, 6177-6196, doi:10.1029/JC094iC05p06177.

Thomson, L. C., Hirst, B., Gibson, G., Gillespie, S., Jonathan, P., Skeldon, K. D., & Padgett, M. J. (2007), An improved algorithm for locating a gas source using inverse methods, *Atmos. Environ.*, 41, No.6, 1128-1134, doi:10.1016/j.atmosenv.2006.10.003.

Tikhonov, A. N., & V. I. A. Arsenin (1977), *Solutions of ill-posed problems*, Scripta Series in mathematics, Winston, Halsted Press Book, Univ. of Michigan

Uliasz, M., & Pielke, R. A. (1991), Application of the receptor oriented approach in mesoscale dispersion modeling. In *Air Pollution Modeling and Its Application VIII* (pp. 399-407), Springer, Boston, MA.

Vallagh , S., Papadopoulo, T., & Clerc, M. (2008), The adjoint method for general EEG and MEG sensor-based lead field equations. *Physics in Medicine & Biology*, 54(1), 135.

Weinstein, D., Zhukov, L., & Johnson, C. (2000), Lead-field bases for electroencephalography source imaging. *Annals of biomedical engineering*, 28(9), 1059-1065.

Winiarek, V., Bocquet, M., Saunier, O., & Mathieu, A. (2012), Estimation of errors in the inverse modeling of accidental release of atmospheric pollutant: Application to the reconstruction of the cesium-137 and iodine-131 source terms from the Fukushima Daiichi power plant, *J. Geophys. Res.*, 117, doi:10.1029/2011JD016932.

Winiarek, V. (2014), Dispersion atmosphérique et modélisation inverse pour la reconstruction de sources accidentelles de polluants, PhD thesis, Université Paris-Est, France.

Yang, Y., Gu, M., Chen, S., & Jin X. (2009), New inflow boundary conditions for modelling the neutral equilibrium atmospheric boundary layer in computational wind engineering, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.*, 97(2), 88–95, doi:10.1016/j.jweia.2008.12.001.

Yee, E., & Bilitoft, C. (2004), Concentration fluctuation measurements in a plume dispersing through a regular array of obstacles, *Boundary Layer Meteorol.*, 111(3), 363–415, doi:10.1023/B:BOUN.0000016496.83909.ee.

Yee, E., Lien, F.-S., Keats, A., & D'Amours, R. (2008), Bayesian inversion of concentration data: Source reconstruction in the adjoint representation of atmospheric diffusion. *J. Wind Eng. Ind. Aerod.*, 9, 1805–1816.

Yee, E. (2012), Inverse Dispersion for an Unknown Number of Sources: Model Selection and Uncertainty Analysis, *ISRN Applied Mathematics*, 2012, doi: 10.5402/2012/465320.

Zheng, X. P., & Chen, Z. Q. (2011), Inverse calculation approaches for source determination in hazardous chemical releases, *J. Loss Prev. Process Ind.*, 24, 293-301, doi:10.1016/j.jlp.2011.01.002

10. ANNEXES

10.1 Evaluation des modèles de dispersion, cas de l'approche directe

10.1.1 Expériences DYCE

Pour évaluer qualitativement l'ajustement du modèle (176) aux valeurs mesurées, et donc pour avoir rapidement une idée de la qualité des résultats obtenus, nous avons utilisé un « scatter-diagram » ou diagramme de dispersion. Sur un graphique, on place en abscisse les valeurs observées, adimensionnées,

$\mu_i^* = \frac{\mu_i u_{ref} H^2}{Q}$ ($i=1, \dots, m$) et en ordonnée les m valeurs

modélisées, adimensionnées $(\mu_{mo})_i^* = \frac{(\mu_{mo})_i u_{ref} H^2}{Q}$ et on trace les points $M_i : \{\mu_i^*, (\mu_{mo})_i^*\}$.

Dans notre cas, figure 53, le nuage de points est aligné suivant la diagonale : le modèle est pertinent. Les droites jaunes indiquent une surestimation ou une sous-estimation d'un facteur deux par rapport à la diagonale.

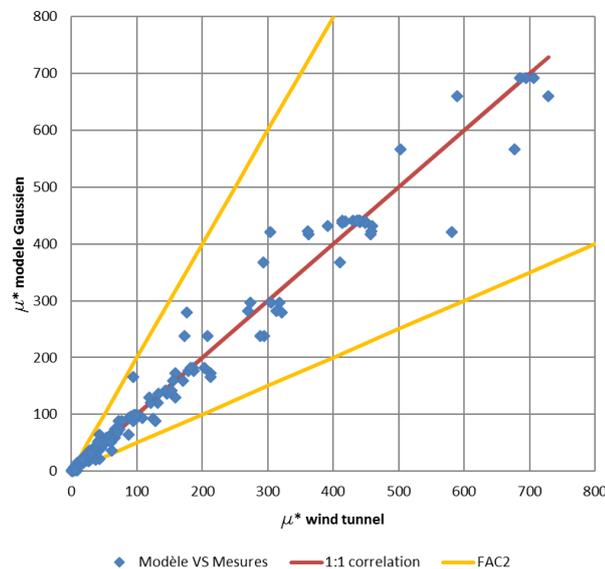


Fig. 53 Scatter-plot pour le modèle Gaussien optimisé.

En complément, nous avons calculé les indicateurs statistiques proposés par (Chang et Hanna, 2004) :

- Le biais fractionnel (FB).
- L'erreur quadratique moyenne normalisée (NMSE).
- Le biais géométrique moyen (MG).
- La variance géométrique (VG).

- Le facteur 2 (FAC2).
- Le coefficient de corrélation (R).

Leur formule est donnée dans le tableau 8, où $\bar{\mu} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mu_i$ désigne la moyenne des observations et $r_i = \mu_i - (\mu_{mo})_i$ l'écart entre les mesures et la modélisation.

Formule	Modèle parfait	Valeurs admises
$FB = 2 \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i}{\bar{\mu} + \bar{\mu}_{mo}}$	0	$ FB \leq 0,3$
$NMSE = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i^2}{\bar{\mu} \cdot \bar{\mu}_{mo}}$	0	$NMSE \leq 3$
$MG = \exp\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(\mu_i) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \ln(\mu_{mo})_i\right)$	1	$0,7 \leq MG \leq 1,3$
$VG = \exp\left\{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\ln(\mu_i) - \ln(\mu_{mo})_i)^2\right\}$	1	$VG \leq 1,6$
$FAC2 = \text{proportion de valeurs telles que}$ $0,5 < \left \frac{\mu_i}{(\mu_{mo})_i} \right < 2$	1	$FAC2 \geq 50\%$
$R = \frac{\sum_{i=1}^m [\mu_i - \bar{\mu}][(\mu_{mo})_i - \bar{\mu}_{mo}]}{\sqrt{\sum_{i=1}^m [\mu_i - \bar{\mu}]^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^m [(\mu_{mo})_i - \bar{\mu}_{mo}]^2}}$	1	

Tab. 8: Statistiques proposées par (Chang et Hanna, 2004).

Les résultats du tableau 9 montrent que le modèle obtient de très bons résultats et que son utilisation dans le cadre d'une approche inverse minimisera les erreurs de modèle.

FB	0,001
NMSE	0,04
MG	0,99
VG	1,12
FAC2	0,93
R	0,98

Tab. 9: Indicateurs statistiques pour les (« single FFID expériences »).

10.1.2 Expériences FFT07

Pour évaluer qualitativement l'ajustement du modèle (179) aux valeurs mesurées, et donc pour avoir rapidement une idée de la qualité des résultats obtenus, nous avons utilisé des « scatter-diagrams ».

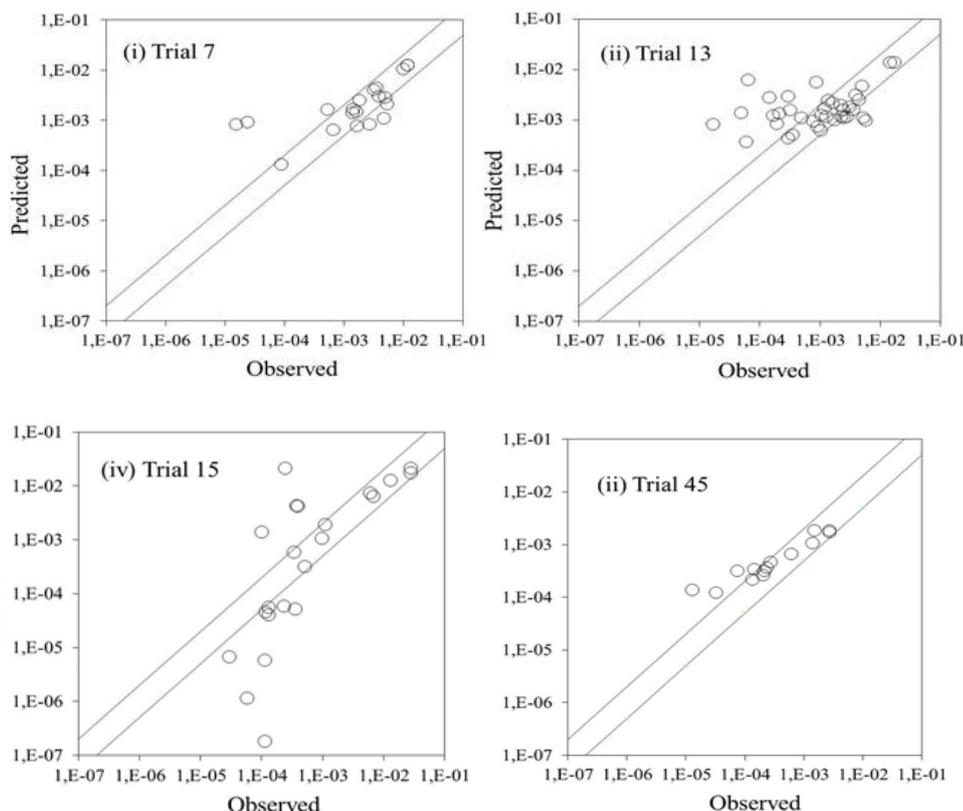


Fig. 54 : Diagramme de dispersion (échelle log) pour les essais 7,13, 15 et 45.

Les diagrammes de dispersion pour les essais 7,13 15 et 45 sont représentés sur la figure 54. Sur ces diagrammes, on place en abscisse les valeurs observées des concentrations et en ordonnée les valeurs modélisées. Les deux droites indiquent une surestimation ou une sous-estimation d'un facteur deux par rapport à la diagonale. On voit ici que les concentrations estimées sont en bon accord avec les concentrations observées, à l'exception du cas 15. Les indicateurs de performance statistiques calculés pour tous les essais sont donnés dans le tableau 10. Parmi eux, quatre expériences (7 et 13 pour les cas stables, 45 et 54 pour les instables) ont tous leurs critères dans les limites fixées au paragraphe précédent. En conditions stables, l'erreur quadratique moyenne normalisée est acceptable sauf pour les cas 46 et 64. Ceci est dû à la forte variabilité de la direction du vent pour ces expériences. Les valeurs du biais fractionnel restent acceptables pour la majorité des expériences sauf pour les cas 14, 30 et 64. Les valeurs majoritairement positives traduisent une tendance à obtenir, par le calcul, des valeurs inférieures aux concentrations mesurées. Les résultats sont globalement meilleurs pour les cas instables,

(sauf pour l'expérience 16) où, à l'inverse, le modèle a tendance à surestimer les mesures, notamment pour les faibles concentrations. De façon globale et en moyenne, 52% des valeurs calculées correspondent, dans un facteur 2, aux valeurs mesurées.

Trials	NMSE	FB	FAC2	Max. Pred/Max. Obs
7	0,23	0,14	0,67	1,05
13	2,5	0,21	0,46	1,5
14	1,16	-0,39	0,56	0,80
15	2,9	-0,27	0,33	0,75
30	2,13	0,56	0,33	0,62
46	4,35	0,26	0,32	1,7
64	5,2	0,33	0,53	0,80
16	2,6	-0,07	0,46	1,72
45	0,28	-0,023	0,75	0,68
54	0,17	0,20	0,81	1,00

Tab. 10 : Indicateurs statistiques pour les 10 essais retenus

10.1.3 Expériences MUST

Le diagramme de dispersion pour l'ensemble des 20 cas est représenté figure 55. La paramétrisation retenue correspond au « cas 3 » de cette figure. Sur ce diagramme, les droites indiquent une surestimation ou une sous-estimation d'un facteur deux par rapport à la diagonale. Il montre que les concentrations estimées sont en bon accord avec les concentrations observées. Sur ce diagramme, on observe aussi plusieurs valeurs désignées comme étant de « faux positifs » ou de « faux négatifs ». Les « faux négatifs » sont des valeurs que le modèle a prédit nulles mais qui correspondent à des observations réelles non nulles. Pour éviter que certains indicateurs statistiques calculent un logarithme non défini, nous les avons fixés à la limite de détection du capteur. Nous avons fait de même pour les « faux positifs » (valeurs mesurées nulles mais valeurs estimées non nulles). Les indicateurs de performance statistiques calculés pour tous les essais sont donnés dans le tableau 11:

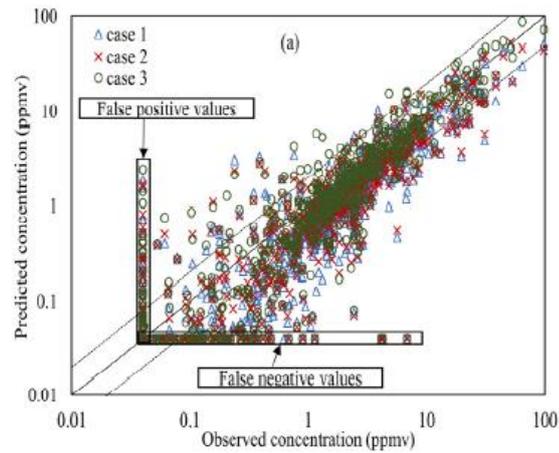


Fig. 55 : Diagramme de dispersion (échelle log) pour la totalité des essais MUST.

Ces résultats montrent qu'avec une bonne paramétrisation des conditions aux limites d'entrée (notamment avec un profil de vent réaliste applicable dans toute la CLA) le modèle Fluidyn-PANACHE obtient de bon résultats.

<i>FB</i>	0,1
<i>NMSE</i>	0,67
<i>MG</i>	1,35
<i>VG</i>	2,44
<i>FAC2</i>	0,69
<i>R</i>	0,92

Tab. 11: Indicateurs statistiques pour l'ensemble des essais MUST, cas 3 : profils de Gryning et al. (2007) & Yang et al. (2009).

10.2 Algorithmes pour le calcul des matrices de pondération

Algorithme écrits en code Matlab – version 8.4.

10.2.1 RENORMID

```
function [w toc_algo iter ev_maxP] = renorm(A,pre)
% renorm : Computes the optimal weights for the
%          renormalized assimilation technique
%
% Input parameters:
%   A:   Sensitivity matrix [m x N]
%   pre: Accepted tolerance for the convergence criterion
%
% Outputs:
%   w:   Vector of optimal weights [N x 1]
%   toc_algo : CPU time to reach convergence
%   iter : Number of iterations to reach convergence
%
% For convergence plot :
%   ev_maxP: Max of |d-1| (should be less than pre at convergence)
%
% gregory.turbelin@univ-evry.fr  March 2019

%# Setting the variables

iter=0;
m=size(A,1);
N=size(A,2);
w=(m/N)*ones(N,1);           %# initial weights such as sum(w)=m
d=zeros(N,1);
tic;                          %# starts the timer.

tA=A';                        %# Transpose of the Weighted Adjoint Matrix
while ~ ( max(abs(d- 1))<=pre )
    tAw=bsxfun(@rdivide,tA,w); %# Transpose of the Weighted Adjoint Matrix
    IHw=inv(A*tAw);           %# Inverse of the Weighted Gram Matrix
    d=sum(tAw*IHw.*tAw,2);     %# Diag. of the Weighted Resolution Matrix
    d(d==0)=min(d(d~=0));      %# To avoid problems with zero values
    w=w.*d.^0.5;              %# Iteration with new weights
    iter=iter+1 ;
    ev_maxP(iter)=max(abs(d- 1));
end
toc_algo=toc;                 %# Elapsed time since tic was used.
```

10.2.2 RENORM3D

```

function [PHI,IHphi] = Renorm3D(A,d,pre,meth)
% RENORM3D : Computes the optimal weights for the
%           3D renormalized assimilation technique
%
% Input parameters:
%   A:   Sensitivity matrix [m×3N]
%   d:   source dimension (1D, 2D, 3D ...)
%   pre: Accepted tolerance for the convergence criterion
%   meth: Method to compute the square root of matrix
%         0: sqrtm() matlab operator
%         1: from eigen decomposition (method used by sqrtm())
%         2: from SVD decomposition
%         3: from SCHUR decomposition
%
% Outputs:
%   PHI: Matrix of optimal weights [3N×3N] sparse matrix
%   IHphi: Inverse of the Weighted Gram Matrix

%# Setting the variables
tr_PHI = 1;
iter = 0;
m = size(A,1);
n = size(A,2);
test1 = 1;
test2 = 1;

PHI = (m/n)*speye(n) ;    %# initial PHI such as trace(PHI)=m
IHphi = inv(A*((PHI)\A')) ;

while ~(abs(tr_PHI - m)<=(3*n)^0.5*pre && test1<=pre && test2<=pre)

    B = cell(1,n/d) ;          % Blocks of PHI=(A'H-1 A)
    for i=0:(n/d-1),
        B{i+1} = A(:,d*i+1:d*i+d)'*IHphi*A(:,d*i+1:d*i+d);

        %Square root of a B
        if meth==0
            %Method 0
            B{i+1} = sqrtm(B{i+1}) ;

        elseif meth==1
            %Method 1 : Best method if B is symmetric and positive definite
            %however any negative eigenvalues cause error
            %MATLAB computes sqrtm(B) with this algorithm
            [v,d] = eigs (B{i+1}) ;
            if any(diag(d)<0), error('B is not positive definite'), end
            B{i+1} = v*(d^0.5)*v' ;

        elseif meth==2
            %Method 2 : Same as 1 if B is symmetric and positive definite
            %but need more work
            [U,S,V] = svd(B{i+1});
            B{i+1} = U * sqrt(S) * V' ;

        elseif meth==3

```

```

%Method 3 : keep in mind that B here must be symmetric.
[u,t] = schur(B{i+1});
e = diag(t) ; % eigenvalues of A
if any(e<0), error('B is not positive definite'), end
B{i+1} = u * diag(sqrt(e)) * u' ;

end
B{i+1} = sparse(B{i+1}) ;
end

PHI = blkdiag(B{:}) ;
tr_PHI = trace(PHI);
%# Inverse of the weighted Gram matrix
%# (PHI)\A' is computed differently than inv(PHI)*A'
%# and is better for inverting sparse matrices
IHphi=inv(A*((PHI)\A'));

% Blocks of RPHI=(PHI-1 A'H-1 A PHI-1), should be equal to I3
R=cell(1,n/d) ;
for i=0:(n/d-1)
    blocPhi = PHI(d*i+1:d*i+d,d*i+1:d*i+d);
    blocA = A(:,d*i+1:d*i+d);
    blocPhiinvA = blocPhi\blocA';%inv(phi)*A'
    AblocPhiinv = blocA/blocPhi;%A*inv(Phi)
    R{i+1}=sparse(blocPhiinvA*IHphi*AblocPhiinv);
end
RPHI= blkdiag(R{:}) ;
%# diagonal terms of R are equal to 1 ?
test1= max(abs(diag(RPHI) - 1)) ;
%# off-diagonal terms of R are equal to 0 ?
test2= full(max(max(abs(RPHI-diag(diag(RPHI))))));

iter=iter+1 ;
end

```


10.3 Evaluation de l'algorithme RENORM3D

Dans le cadre du projet RECREER, Philippe Courmontagne (dont nous reproduisons ici les travaux et résultats) a évalué l'efficacité de l'algorithme à la fois sur des données synthétiques et sur des données réelles. Notons que cette annexe utilise des notations parfois différentes de celles utilisées section 7 et possède ses propres références bibliographiques, référencées à la fin du paragraphe.

10.3.1 Modèle de boîte crânienne et calcul de La Lead Field Matrix

Le modèle de boîte crânienne utilisé est celui de Rush et Driscoll, [Rush1969]. La tête est représentée à l'aide de trois sphères concentriques représentant les différents milieux cérébraux. Les différentes couches de ce modèle représentent de l'intérieur vers l'extérieur : le cerveau (cortex), l'os du crâne et la peau (scalp). S'appuyant sur ce modèle, Rush et Driscoll ont donné une formulation du potentiel rayonné par un dipôle présent dans le cortex en une électrode positionnée sur le scalp. En revanche, se pose le problème de la mise en œuvre informatique et du temps de calcul associé.

Berg et Scherg [Berg1994] ont proposé une approximation du potentiel de surface dans le cadre d'une modélisation à trois sphères concentriques en ne considérant que des potentiels estimés dans le cadre de la modélisation élémentaire à une sphère. Depuis lors, cette approche fait référence car elle permet d'obtenir à moindre coût une estimation précise du potentiel rayonné.

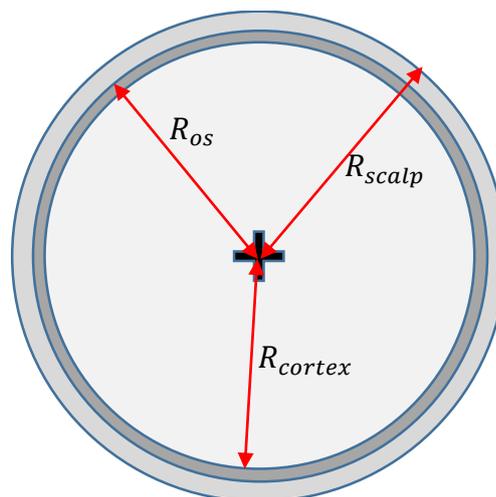


Fig. 56 : *Modèle à trois sphères concentriques*

Le modèle à trois sphères concentriques est proposé à la figure 56 . Rush a proposé pour rayons des trois sphères, les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} R_{cortex} = 8.0 \text{ cm} \\ R_{os} = 8.5 \text{ cm} \\ R_{scalp} = 9.2 \text{ cm} \end{cases}$$

Conduisant aux valeurs normalisées suivantes, en considérant un rayon unitaire pour le scalp :

$$\begin{cases} \tilde{R}_{cortex} = 0.87 \\ \tilde{R}_{os} = 0.92 \\ \tilde{R}_{scalp} = 1.00 \end{cases}$$

En modélisant ainsi la géométrie de la tête, le potentiel de surface peut être calculé en considérant l'inhomogénéité du milieu, chaque couche ayant une conductivité qui lui est propre. Les conductivités normalisées de ces milieux homogènes sont relativement bien établies dans la littérature ([Rush1968], [Cuffin1993], [Meijs1989]) et sont définies comme : $\sigma_{cortex} = \sigma_{scalp} = 80 \times \sigma_{os}$. Par ailleurs, dans la littérature ([Cuffin1979], [Rush1968], [Stok1986]), ces différentes conductivités sont données avec pour valeurs :

$$\begin{cases} \sigma_{cortex} = \sigma_{scalp} = 0.33 \Omega^{-1}m^{-1} \\ \sigma_{os} = 0.0041 \Omega^{-1}m^{-1} \end{cases}$$

En notant $V^{3s}(R, \|\vec{r}_m\|, \|\vec{m}\|)$ le potentiel estimé en surface à partir d'une modélisation à trois sphères concentriques, Berg a proposé de l'obtenir comme suit :

$$\begin{aligned} V^{3s}(R, \|\vec{r}_m\|, \|\vec{m}\|) & \quad (281) \\ & = V_1(R, \mu_1 \|\vec{r}_m\|, \lambda_1 \|\vec{m}\|) + V_2(R, \mu_2 \|\vec{r}_m\|, \lambda_2 \|\vec{m}\|) \\ & + V_3(R, \mu_3 \|\vec{r}_m\|, \lambda_3 \|\vec{m}\|) \end{aligned}$$

où $V_k(R, \|\vec{r}_m\|, \|\vec{m}\|)$ désigne le potentiel mesuré à partir d'un modèle à une sphère, \vec{m} est le dipôle et \vec{r}_m son vecteur position. Les paramètres μ_k et λ_k présents dans la relation (281) permettent de tenir compte de la conductivité des différents milieux et du rayon des sphères associées. Ces paramètres, connus sous l'appellation de paramètres de Berg, sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Scalp	Os	Cortex
μ_k	0.4421	0.7687	0.9901
λ_k	0.3561	0.2389	0.0659

Tab. 12: Paramètres de Berg [Berg1994]

Le recours à la relation (281) permet ainsi d'estimer à moindre coût le potentiel de surface engendré par un dipôle localisé dans le cortex. Pour cela, nous avons modélisé le cerveau « boule » en ayant recours à un maillage présentant un nœud tous les $R_{scalp}/13$ cm (la sphère ainsi constituée s'inscrit dans un cube de $27 \times 27 \times 27$ nœuds). Dans ces conditions, la surface du

crâne est couverte par 529 points (en ne considérant que la demie sphère associée à la partie supérieure du crâne) dont certains correspondent à la position des électrodes.

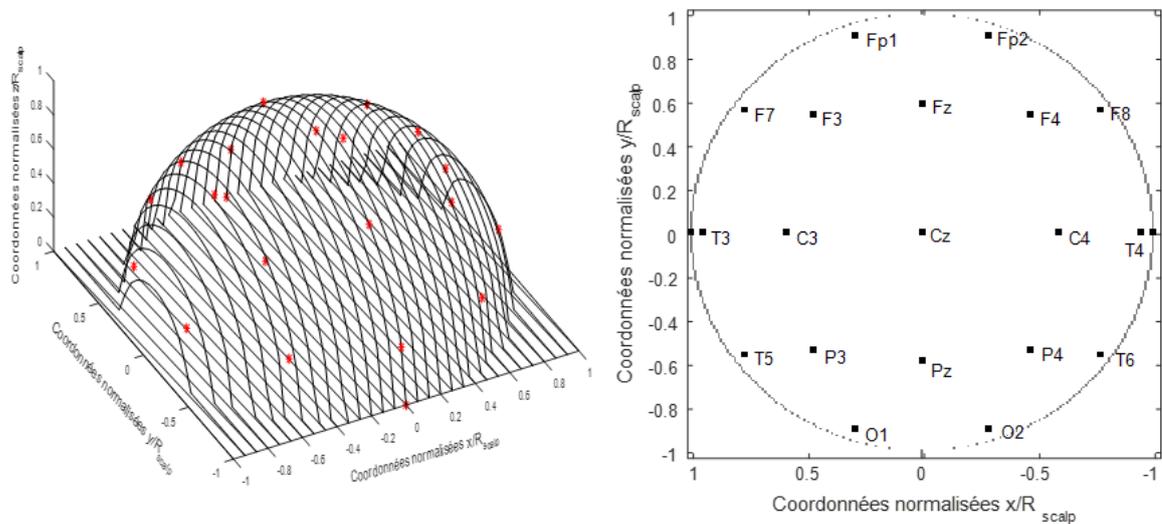


Fig. 57 : Placement des électrodes suivant la norme 10/20 sous environnement Matlab

Pour calculer les éléments de la Lead Field Matrix, en chaque nœud ont été positionnés 3 dipôles directionnels : $\vec{m}_x = \vec{e}_x$, $\vec{m}_y = \vec{e}_y$ et $\vec{m}_z = \vec{e}_z$. Pour chacun de ces dipôles, et pour chaque nœud considéré, les potentiels $V^{3s}(R_{electrode}, \|\vec{r}_m\|, \|\vec{m}\|)$ mesurés en chaque électrode ont été estimés par l'équation (281). Pour cela, chaque $V_k(R, \|\vec{r}_m\|, \|\vec{m}\|)$ est calculé par un modèle développé en interne à partir des travaux d'Ary [Ary1981]. Il a été montré, par ailleurs, que ce modèle donne de meilleurs résultats que celui de [Zhang1995] qui est couramment utilisé dans la littérature.

10.3.2 Evaluation sur des données synthétiques & réelles

A titre d'illustration, la figure 58 présente les potentiels de surface obtenus, en résolvant le problème direct, à partir d'un dipôle $\vec{J} = (2, 0.5, 1.5)$, positionné au nœud de coordonnées $(-0.23, 0.54, 0.54)$.

Dipôle (2,0.5,1.5) au point de coordonnées (-0.23,0.54,0.54)

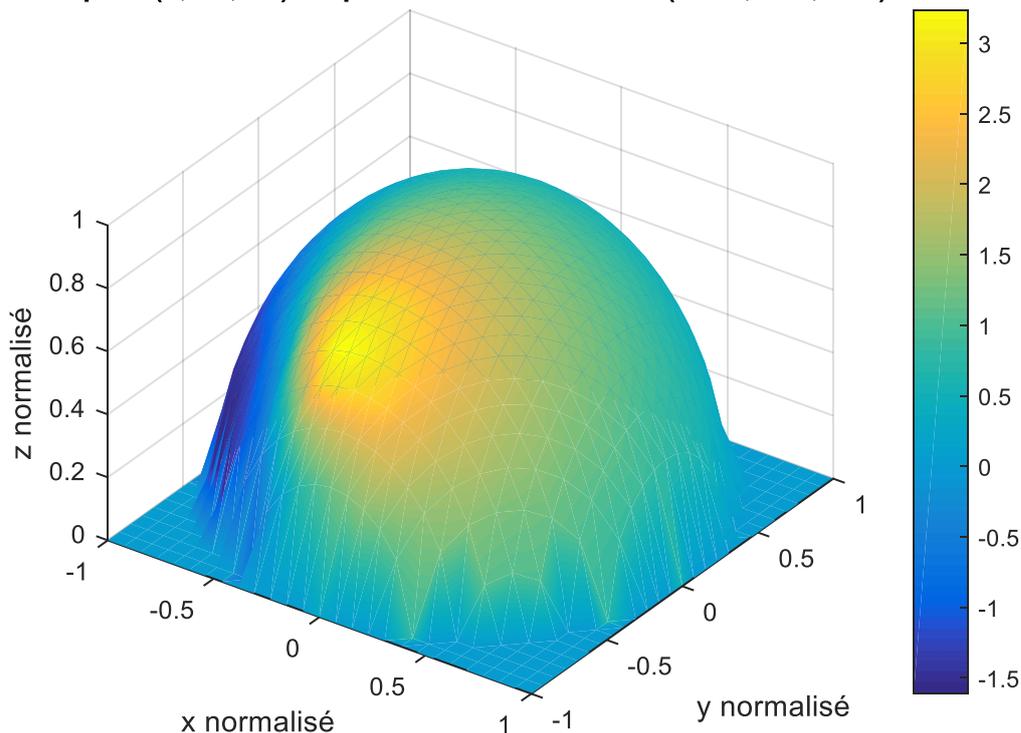


Fig. 58 : Potentiel de surface obtenu par application du problème direct, en considérant l'approche de Berg couplée aux potentiels décrits par notre modèle analytique

Le problème inverse à résoudre est le suivant : « Connaissant les différences de potentiel mesurées en surface, est-on capable d'estimer correctement le dipôle qui en est à la cause et son point d'origine ? ». En d'autres termes, à partir de la donnée présentée à la figure 58, est-on capable de retrouver pour origine du dipôle les coordonnées (-0.23,0.54,0.54) ainsi que le dipôle $\vec{J} = (2,0.5,1.5)$?

En appliquant la méthode RENORM3D et en utilisant 20 mesures (norme 10/20) issues des potentiels de surface présentés à la figure 58, on retrouve précisément le dipôle mis en jeu et les coordonnées d'origine associées. Nous présentons, à la figure 59, la norme obtenue pour différentes valeurs de z après l'étape de normalisation. L'identification de la position du maxima conduit à la détermination des coordonnées du point d'émission. Dans le cadre de l'exemple présenté à la figure 59, on constate que ce maxima est atteint pour $z = 0.542$ (pour une valeur de x proche de -0.25 et une de y sensiblement égale à 0.54). Une analyse numérique de ce maxima conduit à la détermination précise de la position du point d'origine.

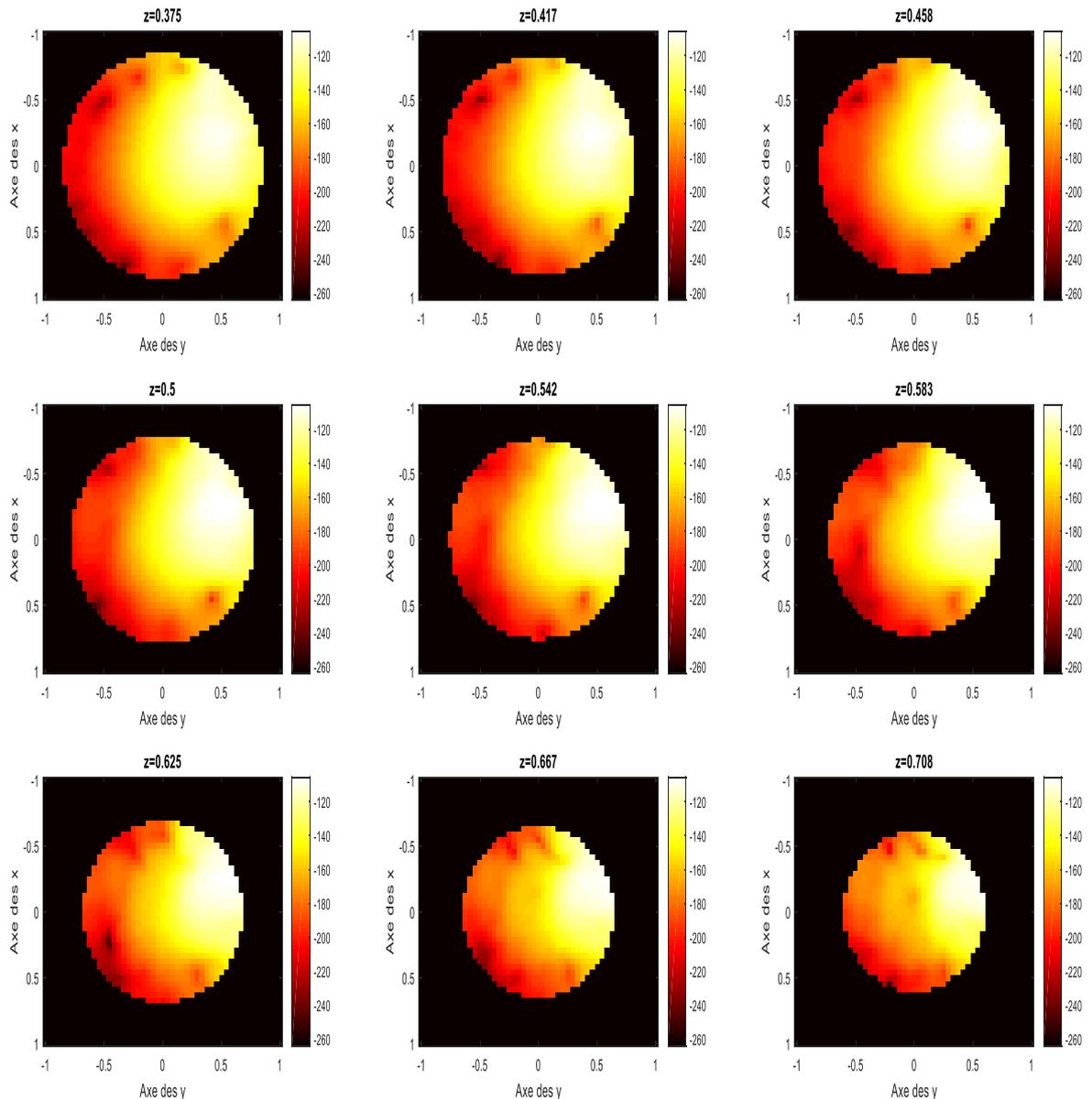


Fig. 59 : Normes obtenues pour différentes valeurs de z – Représentation en dB

Ce même travail a été réalisé sur des données réelles issues d'une expérience effectuée sur des sujets sains ayant une vue normale ou corrigée, sans antécédents de migraine, d'épilepsie ou de tout autre trouble neurologique [Emge2018]. Elle consistait à observer pendant 15 secondes un stimuli visuel (un damier noir et blanc alternant à une fréquence donnée) tandis que 16 électrodes, placées selon la norme internationale 10-20, enregistraient le signal EEG à une fréquence de 1,8 kHz. Les données étaient ensuite traitées à l'aide d'un filtre coupe-bande à 50 Hz, afin d'éliminer le bruit du circuit électrique, et d'un filtre passe-bande (0,5 ; 80 Hz). On sait que ce type de stimulation intermittente stimule les aires visuelles qui occupent le lobe occipital du cerveau. Nous avons traité le cas où la fréquence de stimulation était égale à 5Hz. Nous avons utilisé les données brutes et inversé les données toutes les 0,0005s. Nous avons ainsi

généralisé une cartographie dynamique du cerveau (dont un extrait est présenté figure 60). Les résultats montrent un déplacement alternatif de l'activité cérébrale du lobe frontal (en bas des images) vers le lobe occipital (en haut des images).

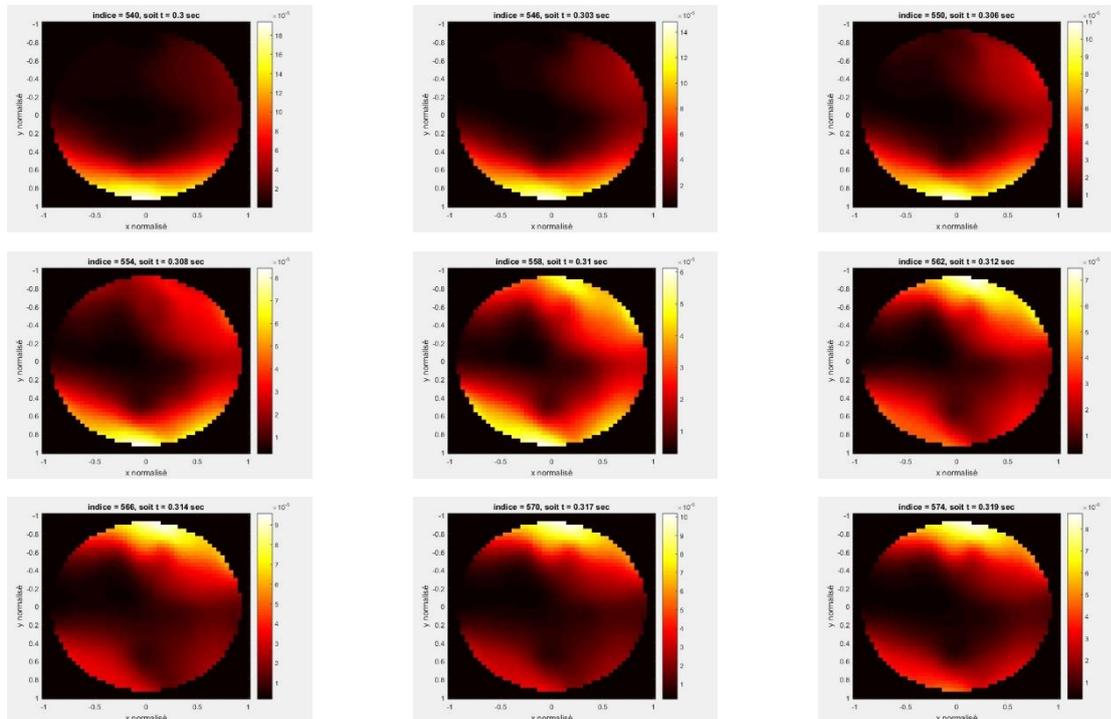


Fig. 60 : Déplacement de l'activité cérébrale du lobe frontal (en bas des images) vers le lobe occipital (en haut des images) sur une période de 0,19s. Attention, ici la norme est intégrée suivant l'axe z et les échelles varient légèrement d'une image à l'autre.

Avec RENORM3D, nous avons réussi à mettre en évidence la stimulation du lobe visuel par un signal lumineux intermittent. Cependant, nous avons également mis en évidence une stimulation du cortex préfrontal qui reste à expliquer (probablement due à une activité musculaire autour des yeux).

10.3.3 Références

- [Ary1981] Ary, J.P., Klein, S.A. and Fender, D.H. Location of sources of evoked scalp potentials: corrections for skull and scalp thicknesses. IEEE Trans. Bio-med. Eng., 1981, BME-28: 447-452.
- [Berg1994] P. Berg and M. Scherg, A fast method for forward computation of multiple-shell spherical head models, Electroenceph. Clin. Neurophysiol., Vol. 90, pp. 58-64, 1994.
- [Cuffin1979] Cuffin, B.N. and Cohen, D. Comparison of the magnetoencephalogram and electroencephalogram. Electroenceph. clin. Neurophysiol., 1979, 47: 132-146.
- [Cuffin1993] Cuffin BN., Effects of local variations in skull and scalp thickness on EEG's and MEG's, IEEE Trans. on Biomed. Eng., Vol. 40, No 1, January, 1993

- [Emge2018] Emge, D.K., Vialatte, F.B., Dreyfus, G. and Adalı, T., Independent Vector Analysis for SSVEP Signal Enhancement, Detection, and Topographical Mapping. *Brain topography* 31.1 (2018): 117-124
- [Meijs1989] Meijs J.W.H., Weier O.W., Peters M.J. and Van Oosterom A., On the numerical accuracy of the boundary element method., *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol 36, No 10, October, 1989
- [Rush1968] Rush, S. and Driscoll, D.A. Current distribution in the brain from surface electrodes. *Anesth. Analg.*, 1968, 47: 717-723.
- [Rush1969] Rush, S. and Driscoll, D.A. EEG electrode sensitivity-An application of reciprocity. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1969, 16, 15-22.
- [Stock1986] Stok, C.J. The inverse problem in EEG and MEG with application to visual evoked responses. CIP Gegevens Koninklijke Bibliotheek. The Hague, 1986.
- [Zhang1995] Zhang Z., A fast method to compute surface potentials generated by dipoles within multilayer anisotropic spheres, *Phys. Med. Biol.*, Vol. 40, pp. 335-349, 1995.